FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Métricas Conforme Einstein Homogéneas No Reductivas

Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez

2015/2016

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MASTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Métricas Conforme Einstein Homogéneas No Reductivas

Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez

Julio, 2016

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Eduardo García Río, profesor do Departamento de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela, Esteban Calviño Louzao, profesor do IES Ramón Caamaño (Muxía), e Ramón Vázquez Lorenzo, profesor do IES de Ribadeo Dionisio Gamallo (Ribadeo), como directores do Traballo Fin de Mestrado con título *Métricas Conforme Einstein Homogéneas no Reductivas*,

AUTORIZAMOS

a dona Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez para a súa presentación coa fin de obter o Título de Mestrado en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Santiago de Compostela, a 6 de julio de 2016.

Esteban Calviño Louzao   Eduardo García Río   Ramón Vázquez Lorenzo

Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez

Agradecimientos

Estas líneas expresan mi agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda colaboraron en la realización del presente trabajo, en especial a Eduardo García Río, Esteban Calviño Louzao y Ramón Vázquez Lorenzo directores de este trabajo; por su orientación, seguimiento y la supervisión continua del mismo. Agradezco también los consejos y la ayuda del profesor Manuel Ladra González.

Por otra parte expreso mi gratitud a la Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca por brindarme la oportunidad de continuar mis estudios en España.

Un especial agradecimiento por la comprensión y el ánimo recibido por parte de mi familia, amigos y por supuesto de Xabi.

Índice general

Abstract

In this work we analize the conformally Einstein equation

$$(n-2)\operatorname{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \frac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau\}g$$

for non reductives pseudo-riemannian 4-dimensional homogeneous spaces. We determine explicity which non reductive homogeneous 4-manifolds are conformally Einstein and we give the conformal Einstein metrics in each case. Moreover, the metrics inside each conformal class are Ricci flat and, in some cases, we found two-parameter and three-parameter families of conformal Ricci flat metrics.

Resumen

En este trabajo analizamos la ecuación conforme Einstein

$$(n-2)\operatorname{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \frac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau\}g$$

para los espacios pseudo-riemannianos homogéneos no reductivos de dimensión 4. Determinamos explícitamente qué variedades homogéneas no reductivas son conforme Einstein y damos todas las posibles métricas conforme Einstein en cada caso. En particular, las métricas Einstein en cada clase conforme son Ricci llanas y, en algunos casos, encontramos familias dos y tres paramétricas de métricas conformes Ricci llanas.

Resumo

Neste traballo analizamos a ecuación conforme Einstein

$$(n-2)\operatorname{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \frac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau\}g$$

para os espazos pseudo-riemannianos homoxéneos non reductivos de dimensión 4. Determinamos explícitamente que variedades homoxéneas non reductivas son conforme Einstein e damos tódalas posibles métricas conforme Einstein en cada caso. En particular, as métricas Einstein en cada clase conforme son Ricci chás e, nalgúns casos, atopamos familias dous e tres paramétricas de métricas conformes Ricci chás.

Introducción

Dentro de la geometría pseudo-riemanniana existen diversos espacios que son de gran importancia por su riqueza física y/o geométrica, los espacios Einstein son un ejemplo de ello. Una variedad pseudo-riemanniana (M, g) de dimensión $n \geq 3$ se dice un *espacio Einstein* si el tensor de Ricci ρ es un múltiplo escalar del tensor métrico g y, en este caso, la métrica se denomina *métrica Einstein*. La existencia de métricas Einstein sobre una variedad dada es todavía un problema abierto. Una técnica habitualmente utilizada en geometría pseudo-riemanniana, con el fin de mejorar el comportamiento de una métrica dada, consiste en perturbar la métrica inicial, de forma que se pueda controlar su curvatura de Ricci. Las deformaciones conformes han mostrado su utilidad en numerosos problemas por lo que, desde el trabajo inicial de Brinkmann [9], se viene estudiando la existencia de métricas Einstein en la clase conforme de una métrica dada.

En dimensión dos, toda métrica posee un representante de Einstein en su clase conforme. En dimensión tres el problema es equivalente al carácter localmente conformemente llano de la variedad, lo que puede caracterizarse mediante la anulación del tensor de Cotton, resultando una ecuación tensorial. En dimensiones superiores Brinkmann ha probado que, si existe una métrica Einstein en la clase conforme, entonces la deformación conforme viene determinada por la ecuación

$$(n-2)\operatorname{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \frac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau\}g\,,$$

donde $\operatorname{Hes}_\varphi$ y $\Delta\varphi$ denotan el Hessiano y el Laplaciano respectivamente de la función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

A pesar de la aparente simplicidad, la ecuación conforme Einstein es muy compleja y su integración resulta extraordinariamente complicada. El hecho de tener traza nula al igual que divergencia cero, complica la obtención de información sobre la geometría subyacente.

Centrándonos en el caso de dimensión cuatro, la situación más sencilla en la que la existencia de métricas conforme Einstein es no trivial, Kozameh, Newman y Tod [29] mostraron que el problema consta de dos condiciones independientes. Una de esas condiciones es la anulación del tensor de Bach. El origen del tensor de Bach [3] surge como una condición de integrabilidad para que un espacio de dimensión 4 sea conforme a un espacio Einstein. Este tensor se construye de manera puramente geométrica y por lo tanto captura las características necesarias para que un espacio sea conforme Einstein de manera intrínseca. Gover y Nurowski [26] obtuvieron algunas obstrucciones tensoriales para que una métrica sea conforme Einstein bajo ciertas condiciones de no degeneración para el tensor de Weyl conforme. Hoy en día es un problema abierto caracterizar las variedades conforme Einstein mediante ecuaciones tensoriales.

La existencia de métricas Einstein es más sencilla de abordar para variedades homogéneas, en cuyo caso el sistema de ecuaciones en derivadas parciales se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas (generalmente sobredeterminado). Una variedad pseudo-riemanniana homogénea (M, g) se dice *reductiva* si puede realizarse como el cociente $M = G/H$ tal que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G puede descomponerse como la suma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{m}$ es un subespacio $\mathrm{Ad}(H)$-invariante de $\mathfrak{g}$. Las variedades pseudo-riemannianas homogéneas en dimensión 2 y 3 son reductivas pero existen variedades pseudo-riemannianas homogénas en dimensión 4 con métricas tanto Lorentzianas como de signatura neutra $(2, 2)$ que son no reductivas. Las variedades pseudo-riemannianas homogéneas no reductivas de dimensión 4 fueron clasificadas por Fels y Renner [20] en términos de sus correspondientes álgebras de Lie no reductivas. Después de la clasificación de Fels y Renner, las propiedades geométricas de estos espacios han sido intensamente estudiadas bajo distintos puntos de vista. Es importante señalar que, si bien la geometría de los espacios homogéneos pseudo-riemannianos reductivos presenta un alto grado de similitud con sus análogos Riemannianos, los espacios homogéneos no reductivos se corresponden con una situación estrictamente pseudo-riemanniana, sin análogo definido positivo.

El propósito en este trabajo es analizar la ecuación conforme Einstein para los espacios homogéneos no reductivos pseudo-riemannianos de dimensión 4, resolviendo explícitamente el problema de existencia de métricas conforme Einstein y dando todas las posibles métricas conforme Einstein en cada caso. Es importante señalar que todas las métricas Einstein dentro de cada clase conforme son Ricci llanas. Además, mostramos la existencia de familias 2 y 3 paramétricas de métricas conformes que son Ricci llanas en algunos casos.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 fijamos las convenciones y notaciones a utilizar durante todo el trabajo. Introducimos los tensores de Weyl, Cotton y Bach, asimismo damos las condiciones para que exista una descomposición de los tensores curvatura algebraicos. En el Capítulo 2 definimos la descomposición reductiva de una variedad homogénea e introducimos la clasificación de Fels y Renner [20] sobre las variedades pseudo-riemannianas homogéneas no reductivas de dimensión 4. Damos también la descripción explícita en coordenadas globales de cada una de las métricas. En la clasificación de Fels y Renner existen algunas otras posibilidades que no son tomadas en cuenta, por ello en la última parte de este capítulo damos algunos resultados sobre la geometría de estos espacios, llegando así a nuestro teorema principal donde damos las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio homogéneo no reductivo de dimensión 4 sea conforme Einstein. En el Capítulo 3 determinamos algunos hechos importantes sobre la curvatura de los espacios homogéneos no reductivos, analizando los tensores de Ricci, Weyl, Cotton y Bach caso por caso. Finalmente en el Capítulo 4 damos la prueba del teorema principal determinando así qué variedades homogénas no reductivas de dimensión 4 contienen una métrica Einstein en su clase conforme y obtenemos explícitamente la forma de la métrica conforme de Einstein.

Los resultados originales de este trabajo están recogidos en la referencia [17].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo fijaremos la notación que utilizaremos a lo largo del trabajo y daremos las definiciones que motivan el estudio de los capítulos posteriores. Los resultados que se encuentran en este capítulo se detallan en la bibliografía, por lo que omitiremos las demostraciones.

1.1. Variedades pseudo-riemannianas

Una variedad *pseudo-riemanniana* (M, g) es una variedad diferenciable M de dimensión n equipada con un tensor métrico, es decir, es un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico y no degenerado, de signatura $(n - \nu, \nu)$. Dado un vector distinto de cero $v \in T_pM$, diremos que el vector es *temporal* si $g(v, v) < 0$, *espacial* si $g(v, v) > 0$ y *nulo* (o luminoso) si $g(v, v) = 0$. Denotaremos por $S_p^-(M)$, $S_p^+(M)$, $S_p^0(M)$ a los conjuntos de vectores unitarios temporales, espaciales y nulos respectivamente.

Recordemos que la signatura de la métrica g es el par $(n-\nu, \nu)$ tal que $n-\nu$ es el número de valores propios negativos y ν el de positivos de la matriz asociada a g. Así, por ejemplo una variedad pseudo-riemanniana (M, g) n-dimensional es Riemanniana si tiene signatura $(0, n)$, es Lorentziana si tiene signatura $(1, n - 1)$. Además, si n es par y consideramos a g con signatura $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$, se dice que la variedad tiene signatura neutra.

Denotaremos por TM y T^*M a los fibrados tangente y cotangente de la variedad respectivamente. Sea $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de todos los campos de vectores tangentes a M, los campos de vectores los representaremos por letras mayúsculas $X, Y, Z, \ldots$ y los vectores tangentes a cada punto de la variedad por letras minúsculas $x, y, z, \ldots$

Para toda variedad pseudo-riemanniana (M, g) existe una única conexión lineal adaptada ∇, que es libre de torsión, esto es,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \nabla g = 0.$$

Esta conexión recibe el nombre de *conexión de Levi-Civita* y es la única conexión simétrica que hace paralela a la métrica g. La fórmula de Koszul nos da la expresión de tal conexión como:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &+ g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $[\cdot,\cdot]$ representa el corchete de Lie. La conexión puede caracterizarse a partir de los *símbolos de Christoffel.* Dada una carta local $(x^1,\ldots,x^n)$ definimos los simbolos de Christoffel de *primera especie* por

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

y los símbolos de Christoffel de *segunda especie* por

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{ijl},$$

donde $g^{\alpha\beta}$ denota la matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$. De esta forma tenemos que

$$\nabla_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = \Gamma^k_{ij}\partial_{x^k},$$

con $\partial_{x^i} := \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

1.2. Operadores diferenciales

Sean (M,g) una variedad pseudo-riemanniana y $f\colon M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el *operador gradiente* en M como $\nabla\colon C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de tal manera que ∇f está determinado por:

$$g(\nabla\, f, X) = X(f), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

En términos de un sistema de coordenadas locales $(x^1,\ldots,x^n)$ en M, el gradiente de la función f se puede expresar como:

$$\nabla f = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

El *operador Hessiano* de f se define como el endomorfismo $\mathrm{h}_f\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por su segunda diferencial covariante

$$\mathrm{h}_f(X) = \nabla_X(\nabla f).$$

A partir de éste podemos definir un tensor de tipo $(0,2)$ simétrico al que llamaremos *tensor Hessiano*, que denotaremos por Hes_f tal que

$$\mathrm{Hes}_f(X,Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = g(\nabla_X(\nabla f), Y).$$

En términos de un sistema de coordenadas locales podemos expresar el Hessiano como

$$\begin{aligned}\mathrm{Hes}_f(\partial x^i, \partial x^j) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^k}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

Definimos la *divergencia* de un campo de vectores X como la traza del operador ∇X, siendo este el endomorfismo que a cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ le hace corresponder $\nabla_Z X$, es decir,

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr} \nabla X.$$

Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una referencial ortonormal $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \nabla_{E_i} X$ y definimos la divergencia de un campo de tensores T de tipo $(0, s)$ a partir de la traza de ∇T, como

$$\operatorname{div} T(X_1, \ldots, X_{s-1}) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (\nabla_{E_i} T)(X_1, \ldots, X_{s-1}, E_i), \qquad X_1, \ldots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $\epsilon_i = g(E_i, E_i)$. Observemos que la definición es independiente de la referencia que se elija.

1.3. El tensor de curvatura

Dada la conexión de Levi-Civita, definimos el *operador curvatura* $\mathcal{R}$ o tensor de curvatura de tipo (1,3) como:

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

y definimos el tensor de curvatura de tipo (0,4) por

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, V) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, V).$$

El tensor de curvatura presenta las siguientes simetrías algebraicas:

$$\begin{aligned} &a) \quad \mathcal{R}(X, Y, Z, V) = -\mathcal{R}(Y, X, Z, V) = -\mathcal{R}(X, Y, V, Z), \\ &b) \quad \mathcal{R}(X, Y, Z, V) + \mathcal{R}(Y, Z, X, V) + \mathcal{R}(Z, X, Y, V) = 0, \\ &c) \quad \mathcal{R}(X, Y, Z, V) = \mathcal{R}(Z, V, X, Y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

y la identidad diferencial

$$d) \quad (\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z, X, U, V) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X, Y, U, V) = 0.$$

Las identidades *b*) y *d*) se conocen como primera y segunda *identidad de Bianchi* respectivamente. Un tensor de tipo $(0, 4)$ se dice *tensor de curvatura algebraico* si verifica las simetrías (1.1).

La *curvatura seccional* de una variedad Riemanniana (M, g) es una función real K definida sobre la Grasmanniana de 2-planos:

$$K(\pi) = \frac{\mathcal{R}(x, y, x, y)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}$$

para todo 2-plano $\pi = \langle \{x, y\} \rangle$ en T_pM. En el caso pseudo-riemanniano nos restringimos a la Grasmanniana de 2-planos no degenerados, es decir, donde $g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2 \neq 0$. Cuando $\kappa(\pi)$ es independiente de $\pi \subset T_pM$, podemos escribir el tensor de curvatura como:

$$\mathcal{R}(x, y, z, v) = \kappa \mathcal{R}^0(x, y, z, v)$$

donde el tensor curvatura $\mathcal{R}^0$ se conoce como el *tensor de curvatura estándar* y viene dado por

$$\mathcal{R}^0(x, y, z, v) = g(x, z)g(y, v) - g(y, z)g(x, v).$$

La segunda identidad de Bianchi garantiza que κ es necesariamente constante si M es conexa y $\dim M \geq 3$.

A partir del tensor de curvatura, aparecen de forma natural ciertos tensores que podemos definir para cualquier punto p de la variedad (M, g). Denotamos por ρ al *tensor de Ricci* de tipo (0,2) que se define como

$$\rho(x, y) = \operatorname{tr}\{z \mapsto \mathcal{R}(x, z)y\}$$

y el *operador de Ricci*, que denotaremos por Ric, se define como el tensor de tipo (1,1) tal que $g(\operatorname{Ric}(X), Y) = \rho(X, Y)$. Asimismo definimos la *curvatura escalar* τ por

$$\tau = \operatorname{tr} \operatorname{Ric}.$$

Dada una base arbitraria $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM, donde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como:

$$\rho(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R(x, e_i, y, e_j), \quad \tau = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \rho(e_i, e_j).$$

1.4. El tensor de Weyl

Definimos el producto *Kulkarni-Nomizu* de dos formas bilineales simétricas D y B como:

$$\begin{aligned}(D \odot B)(X, Y, Z, V) =& D(X, Z)B(Y, V) + D(Y, Y)B(X, Z) \\ & - D(X, V)B(Y, Z) - D(Y, Z)B(X, V),\end{aligned}$$

con $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$, obteniendo un tensor de tipo $(0, 4)$ que satisface las propiedades algebraicas de curvatura.

Definición 1.1. El *tensor de Schouten* $\mathfrak{S}$ de una variedad pseudo-riemanniana n-dimensional (M, g) se define como el tensor de tipo (0,2) simétrico:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{n-2} \left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)g} \right).$$

El significado geométrico de este tensor aparece en el estudio de la geometría conforme. A partir del producto de Kulkarni-Nomizu del tensor de Shouten y del tensor de curvatura obtenemos el tensor de Weyl.

Definición 1.2. El *tensor de Weyl* $\mathcal{W}$ de una variedad pseudo-riemanniana (M, g) se define como el tensor de tipo (0,4):

$$\mathcal{W} = \mathcal{R} - \mathfrak{S} \odot g.$$

Explícitamente lo podemos expresar como

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(x, y, z, v) &= \mathcal{R}(x, y, z, v) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \{g(x, z)g(y, v) - g(y, z)g(x, v)\} \\ &- \frac{1}{n-2} \{\rho(x, z)g(y, v) - \rho(y, z)g(x, v) + \rho(y, v)g(x, z) - \rho(x, v)g(y, z)\},\end{aligned}$$

para todo $x, y, z, v \in T_pM$.

Otro tensor que nos será de utilidad en los capítulos posteriores, es el tensor de Cotton.

Definición 1.3. El *tensor de Cotton* $\mathfrak{C}$ de una variedad pseudo-riemanniana n-dimensional (M, g) se define como

$$\mathfrak{C}(X, Y, Z) = (\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) - \frac{1}{2(n-1)} [X(\tau)g(Y, Z) - Y(\tau)g(X, Z)].$$

Este tensor mide la falta de simetría en la derivada covariante del tensor de Schouten, pues

$$\mathfrak{C}(X,Y,Z) = (n-2)[(\nabla_X \mathfrak{S})(Y,Z) - (\nabla_Y \mathfrak{S})(X,Z)].$$

Además el tensor de Cotton está determinado por la divergencia del tensor de Weyl de la siguiente manera:

$$(\operatorname{div} \mathcal{W})(X,Y,Z) = \frac{n-3}{n-2}\mathfrak{C}(X,Y,Z).$$

1.5. Métricas conforme Einstein

Una *aplicación conforme* entre dos variedades pseudo-riemannianas (M,g) y $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ es una aplicación diferenciable $F\colon (M,g) \to (\widetilde{M},\widetilde{g})$ con la propiedad $F^*\widetilde{g} = \varphi^{-2}g$, para una función diferenciable $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ distinta de cero en todo punto, es decir,

$$\widetilde{g}_{F(p)}(F^*(p)X, F^*(p)Y) = \varphi^{-2}(p)g_p(X,Y), \qquad \forall p \in M,$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. En particular, las isometrías son aplicaciones conformes para $\varphi = 1$. Diremos que dos variedades pseudo-riemannianas son *conformes* si existe una aplicación conforme entre ellas. Esta noción define una relación de equivalencia en el espacio de variedades. Denotamos con $[g]$ la clase conforme de una métrica pseudo-riemanniana.

Teorema 1.4. [30] *Sea (M,g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión n y $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable no nula en cada punto. Si consideramos en M la métrica dada por $\widetilde{g} = \varphi^{-2}g$, entonces podemos relacionar los siguientes elementos de (M,g) y $(M,\widetilde{g})$ de la siguiente manera:*

1. *Si ∇ y $\widetilde{\nabla}$ son las conexiones de Levi-Civita de g y $\widetilde{g}$ respectivamente, entonces*

$$\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = -X(\log\varphi)Y - Y(\log\varphi)X + g(X,Y)\nabla(\log\varphi).$$

2. *Si $\mathcal{R}$, $\widetilde{\mathcal{R}}$ denotan los tensores de curvatura de tipo $(0,4)$ de g y $\widetilde{g}$ respectivamente, entonces*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}(X,Y)Z - \mathcal{R}(X,Y)Z =& \langle\nabla_X\nabla(\log\varphi), Z\rangle Y + \langle\nabla_Y\nabla(\log\varphi), Z\rangle X\\ &-\langle X,Z\rangle\nabla_Y\nabla(\log\varphi) + \langle Y,Z\rangle\nabla_X\nabla(\log\varphi)\\ &+(Y\log\varphi)(Z\log\varphi)X - (X\log\varphi)(Z\log\varphi)Y\\ &-\langle\nabla(\log\varphi),\nabla(\log\varphi)\rangle\cdot R_1(X,Y)Z\\ &+((X\log\varphi)\langle Y,Z\rangle - (Y\log\varphi)\langle X,Z\rangle)\nabla\log\varphi.\end{aligned}$$

3. *Si ρ y $\widetilde{\rho}$ son los tensores de Ricci de g y $\widetilde{g}$ respectivamente, entonces*

$$\widetilde{\rho} - \rho = \varphi^{-2}((n-2)\cdot\varphi\operatorname{Hes}_\varphi + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2)g),$$

donde $\Delta\varphi = \operatorname{tr}\operatorname{Hes}_\varphi$ es el Laplaciano.

Una variedad pseudo-riemanniana de dimensión $n \geq 3$ se dice un *espacio Einstein* si el tensor de Ricci es un múltiplo del tensor métrico. En este caso, la métrica se denomina *métrica Einstein*

$$\rho = \lambda g. \tag{1.2}$$

Tomando trazas en la Ecuación (1.2) tenemos que $\lambda = \dfrac{\tau}{n}$ y se sigue de la segunda identidad de Bianchi que $\tau =$ constante si M es conexa y dimensión $M \geq 3$. El siguiente resultado nos dice cómo se comportan las métricas Einstein bajo las aplicaciones conformes.

Lema 1.5. [31] *En dimensión $n \geq 3$, una aplicación conforme φ aplica una métrica Einstein g en otra métrica Einstein $\widetilde{g} = \varphi^{-2}g$, sí y sólo si* $\mathrm{Hes}_\varphi = \dfrac{\Delta\varphi}{n} g$.

En particular para $n = 4$, en el caso riemanniano todo espacio Einstein es de curvatura seccional constante si admite una aplicación conforme no trivial sobre otro espacio Einstein (ver [10]).

Definición 1.6. Una variedad pseudo-riemanniana (M, g) se dice *conforme Einstein* si para todo punto $p \in M$ existe una vecindad U y una métrica conformemente equivalente $(\widetilde{U}, \widetilde{g} = \varphi^{-2}g)$ de Einstein, para algún $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.7. [9] *Una variedad es conforme Einstein si y sólo si la siguiente ecuación tiene solución positiva:*

$$(n-2)\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \frac{1}{n}((n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau)g. \tag{1.3}$$

A esta ecuación se le denomina ecuación conforme Einstein*.*

Aunque en dimensión 2 la ecuación es trivial, en dimensiones superiores la integración de la Ecuación (1.3) es sorprendentemente difícil. En dimensión 3, (M, g) es conforme Einstein si y sólo si, es localmente conformemente llana. Sin embargo, en dimensión ≥ 4, existen ejemplos de variedades conforme Einstein que no son localmente conformemente llanas. La Ecuación (1.3) implica que los espacios propios de Hes_φ deben coincidir con los espacios propios dados por el tensor de Ricci ρ. Por lo tanto, los valores propios de Hes_φ están determinados por los valores propios de ρ y por φ.

1.6. Autodualidad

En esta seccción introducimos los conceptos de auto-dualidad y anti-autodualidad, los cuales se obtienen a partir del tensor de curvatura. Estamos interesados en variedades de dimensión 4 y en esta dimensión el tensor de curvatura presenta una descomposición peculiar.

Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, un *bivector* de V es un elemento de la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i \wedge e_j$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq n$. Al conjunto formado por todos los elementos de esta forma se le conoce como el espacio de bivectores $\Lambda^2(V)$ y tiene las siguientes propiedades:

- $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ y $e_i \wedge e_i = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
- El conjunto $e_1 \wedge e_2, \ldots, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, \ldots, e_{n-1} \wedge e_n$ forma una base de $\Lambda^2(V)$.

En consecuencia, el espacio $\Lambda^2(V)$ tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Definimos el *producto wedge* de dos elementos $x, y \in V$, con $x = x^i e_i, y = y^j e_j$ como:

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} y^j e_j\right) \\ &= \sum_{i<j} (x^i y^j - x^j y^i) e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V. \end{aligned}$$

A pesar de que la construcción que usaremos es válida en general para cualquier espacio vectorial dotado con un producto escalar, nos interesa el caso en el que el espacio vectorial es el espacio tangente en un punto de una variedad pseudo-riemanniana.

Lema 1.8. [30] *Dado un espacio vectorial V de dimensión n y un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que denotaremos por $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, la aplicación $\ll,\gg\colon \Lambda^2V\times\Lambda^2V\to\mathbb{R}$*

$$\ll x\wedge y, z\wedge t\gg = \langle x,z\rangle\langle y,t\rangle - \langle x,t\rangle\langle y,z\rangle,$$

es un producto escalar en Λ^2V. Además, si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base ortonormal de V, también lo será la base dada por los elementos $e_i\wedge e_j$ $(i<j)$ con la métrica que induce este producto en Λ^2V.

Observación 1.9. El producto escalar definido en el Lema 1.8 tiene la siguiente relación:

$$\mathcal{R}^0(x,y,x,y) = \ll x\wedge y, x\wedge y\gg,\quad x,y\in T_pM.$$

Lema 1.10. [30] *El espacio de los endomorfismos de Λ^2V tiene el siguiente producto escalar:*

$$\ll A,B\gg := \operatorname{tr}(A\circ B).$$

Consideremos $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión 4 con signatura $(2,2)$ y sea $B=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ una base ortonormal de V. Sea Λ^2V con la métrica $\ll,\gg$ de tal manera que Λ^2V tiene dimensión 6. Para calcular la signatura de Λ^2V consideramos la base inducida por los elementos de B, es decir,

$$B_\Lambda = \{e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3, e_1\wedge e_4, e_2\wedge e_3, e_2\wedge e_4, e_3\wedge e_4\},$$

y basta hacer el producto escalar de cada elemento de la base por sí mismo, pues el Lema 1.8 nos garantiza que esta base es ortonormal:

$$\ll e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_2\gg = \langle e_1,e_1\rangle\langle e_2,e_2\rangle - \langle e_1,e_2\rangle\langle e_2,e_1\rangle = \epsilon_1\epsilon_2$$
$$\ll e_1\wedge e_3, e_1\wedge e_3\gg = \langle e_1,e_1\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_1,e_3\rangle\langle e_3,e_1\rangle = \epsilon_1\epsilon_3$$
$$\ll e_1\wedge e_4, e_1\wedge e_4\gg = \langle e_1,e_1\rangle\langle e_4,e_4\rangle - \langle e_1,e_4\rangle\langle e_4,e_1\rangle = \epsilon_1\epsilon_4$$
$$\ll e_2\wedge e_3, e_2\wedge e_3\gg = \langle e_2,e_2\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_2,e_3\rangle\langle e_3,e_2\rangle = \epsilon_2\epsilon_3$$
$$\ll e_2\wedge e_4, e_2\wedge e_4\gg = \langle e_2,e_2\rangle\langle e_4,e_4\rangle - \langle e_2,e_4\rangle\langle e_4,e_2\rangle = \epsilon_2\epsilon_4$$
$$\ll e_3\wedge e_4, e_3\wedge e_4\gg = \langle e_3,e_3\rangle\langle e_4,e_4\rangle - \langle e_3,e_4\rangle\langle e_4,e_3\rangle = \epsilon_3\epsilon_4$$

donde $\epsilon_i=\langle e_i,e_i\rangle$. Para cualquier combinación posible de signos, siempre que la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tenga signatura neutra, la nueva métrica tendrá signatura $(4,2)$. En particular, todo elemento de dicha matriz será de la forma $\epsilon_i\delta_{ij}$. Sea $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ una base ortonormal de V, podemos definir el elemento $e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$ de manera análoga a la forma en la que definimos los elementos de Λ^2V. En este caso, el espacio que se obtiene es de dimensión 1 y el elemento

$$v := e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$$

es un generador que recibe el nombre de *elemento de volumen*. Además, dada una base ortonormal, solo existen dos posibles elementos de volumen distintos.

Definición 1.11. En las condiciones anteriores, el operador *estrella de Hodge* $\star$ se define como el endomorfismo

$$\star\colon \Lambda^2V\to\Lambda^2V,\quad \gamma\mapsto\star\gamma,$$

tal que si $\alpha,\beta\in\Lambda^2V$ entonces $\alpha\wedge\star\beta = \ll\alpha,\beta\gg v$.

Este operador cumple las siguientes propiedades en signatura Riemanniana o neutra:

a) $\star^2 = \mathrm{Id}_{\Lambda^2 V}$,

b) $\star$ es un operador autoadjunto.

Notemos que tales propiedades dependen de las distintas signaturas del producto escalar. En la base $e_i \wedge e_j$ tenemos que:

$$\star(e_1 \wedge e_2) = \epsilon_3\epsilon_4 e_3 \wedge e_4, \quad \star(e_1 \wedge e_3) = -\epsilon_2\epsilon_4 e_2 \wedge e_4, \quad \star(e_1 \wedge e_4) = \epsilon_2\epsilon_3 e_2 \wedge e_3,$$

y los elementos restantes se obtienen ya que $\star^2 = \mathrm{Id}_{\Lambda^2 V}$. Usando nuevamente este hecho, los valores propios asociados son 1 ó -1. Nuestro objetivo ahora es descomponer el espacio $\Lambda^2 V$ como suma directa de los espacios asociados a tales valores del operador estrella de Hodge.

Proposición 1.12. *El espacio $\Lambda^2 V$ puede realizarse como la suma directa de los espacios*

$$\Lambda^2_+ V = \{\alpha \in \Lambda^2 V \mid \star\alpha = \alpha\}, \quad \Lambda^2_- V = \{\alpha \in \Lambda^2 V \mid \star\alpha = -\alpha\},$$

a $\Lambda^2_+ V$ se le denomina espacio de 2-formas autoduales y a $\Lambda^2_- V$ espacio de 2-formas anti-autoduales.

1.6.1. Descomposición de la curvatura

El siguiente resultado proporciona una descomposición de los tensores curvatura algebraicos que, a su vez, motiva los tensores introducidos anteriormente.

Teorema 1.13. [30] *Un tensor curvatura algebraico A en un espacio vectorial con producto interior $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se descompone como*

$$A = \mathfrak{U}_A + \mathfrak{Z}_A + \mathcal{W}_A$$

siendo

$$\mathfrak{U}_A = \frac{\tau_A}{2n(n-1)} \langle\cdot,\cdot\rangle \odot \langle\cdot,\cdot\rangle,$$

$$\mathfrak{Z}_A = \frac{1}{n-2}\left(\rho_A - \frac{\tau_A}{n}\langle\cdot,\cdot\rangle\right) \odot \langle\cdot,\cdot\rangle,$$

$$\mathcal{W}_A = A - \mathfrak{U}_A - \mathfrak{Z}_A = A - \mathfrak{S}_A \odot \langle\cdot,\cdot\rangle,$$

donde ρ_A, τ_A y $\mathfrak{S}_A$ son el tensor de Ricci, la curvatura escalar y el tensor de Schouten asociados a la curvatura algebraica de A respectivamente.

Por otro lado, los Lemas 1.8 y 1.10 nos permiten relacionar cada tensor curvatura algebraico en $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con un único endomorfismo autoadjunto en $(\Lambda^2 V, \ll,\gg)$ de la siguiente manera. Dado un tensor de curvatura A, se define el endomorfismo $\widetilde{A}\colon \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ por

$$\ll \widetilde{A}(x \wedge y), z \wedge w \gg = A(x, y, z, w) \quad \forall x, y, z, w \in T_pM,$$

de tal manera que $\widetilde{A}$ queda completamente determinado por A. Recíprocamente podemos determinar un tensor de curvatura A a partir de un endomorfismo autoadjunto.

Observación 1.14. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto formado por los tensores curvatura algebraicos $\mathcal{A}$, y el conjunto de endomorfismos autoadjuntos de $\Lambda^2 V, \widetilde{\mathcal{A}}$, que verifican

$$\ll \widetilde{A}(X \wedge Y), Z \wedge T \gg + \ll \widetilde{A}(Y \wedge Z), X \wedge T \gg + \ll \widetilde{A}(Z \wedge X), Y \wedge T \gg = 0.$$

En particular, el tensor curvatura estándar $\mathcal{A}^0$ se corresponde con el endomorfismo Id_{Λ^2}.

Por lo tanto, si consideramos el operador curvatura asociado a cada tensor de curvatura algebraico A en $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, dicho operador puede interpretarse como un endomorfismo A del espacio de 2-formas $\Lambda^2(V)$. De este modo, las componentes $\mathfrak{U}_A, \mathfrak{Z}_A, \mathcal{W}_A$ del Teorema 1.13 se corresponden con las componentes ortogonales siguientes:

- $\mathfrak{U}_A$ es la proyección ortogonal en el espacio de tensores curvatura algebraicos de curvatura seccional constante.
- La anulación de la componente $\mathfrak{Z}_A$ se corresponde con los tensores curvatura algebraicos de Einstein.
- En dimensión $n \geq 4$, la anulación de la componente $\mathcal{W}_A$ representa los tensores curvatura algebraico localmente conformemente llanos. Dichos tensores están completamente determinados por sus correspondientes tensores de Ricci.

Gracias a que el tensor $\mathcal{W}$ es un tensor de tipo $(0,4)$ que satisface todas las propiedades algebraicas de la curvatura dadas en la Ecuación (1.1), se le puede asociar un endomorfismo $\widetilde{\mathcal{W}}\colon \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$, de tal manera que

$$\ll \widetilde{\mathcal{W}}(x \wedge y), z \wedge t \gg := \mathcal{W}(x, y, z, t).$$

Definición 1.15. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión 4 con signatura neutra. Se dice que V es *autodual* si $\widetilde{\mathcal{W}}(\Lambda^2_- V) \equiv 0$ y es *anti-autodual* si $\widetilde{\mathcal{W}}(\Lambda^2_+ V) \equiv 0$.

Denotaremos por $\widetilde{\mathcal{W}}_\pm$ a la restricción de $\mathcal{W}$ a $\Lambda^2_\pm V$ y por $\mathcal{W}_\pm$ al tensor de curvatura algebraico asociado, de tal forma que si la variedad es autodual (o anti-autodual) tenemos que $\mathcal{W}^- = 0$ (o $\mathcal{W}^+ = 0$).

Definición 1.16. Un tensor curvatura algebraico A se dice *conformemente llano* si $\mathcal{W}_A = 0$ y A se dice *semi-conformemente llano* si éste es autodual ($\mathcal{W}_A^- = 0$) o anti-autodual ($\mathcal{W}_A^+ = 0$).

Lema 1.17. [11] *En las condiciones de la definición anterior, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ es autodual si y sólo si respecto a una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ se verifica que para todo $x, y \in V$:*

$$\mathcal{W}_A(e_1, e_i, x, y) = \sigma_{ijk}\epsilon_j\epsilon_k \mathcal{W}_A(e_j, e_k, x, y),$$

con $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$ y σ_{ijk} la signatura de la permutación correspondiente.

Como estamos interesados en variedades pseudo-riemannianas, podemos reformular la condición de autodualidad del lema anterior para una base pseudo-ortonormal $\{t, u, v, w\}$. Supongamos que la matriz que representa al tensor de la métrica g en nuestra base tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

entonces, todos los productos posibles entre los elementos de la referencia son cero salvo $\langle t, v\rangle = \langle v, t\rangle = \langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle = 1$. A este tipo de referencia se le conoce como pseudo-ortonormal.

Lema 1.18. [11] *En las mismas condiciones, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ es autodual si y sólo si, respecto a una base pseudo-ortonormal {t, u, v, w} de la forma* (1.4)*, se verifica que para todo $x, y \in V$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_A(t, v, x, y) &= \mathcal{W}_A(u, w, x, y), \\ \mathcal{W}_A(t, w, x, y) &= 0, \\ \mathcal{W}_A(u, v, x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Definición 1.19. Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión 4 y signatura neutra. Diremos que M es *autodual* (o anti-autodual) si para todo $p \in M, (T_pM, g_p, \mathcal{R}_p)$ es autodual (o anti-autodual). En tal caso, diremos que (M, g) es *semi-conformemente llana.*

1.6.2. Autodualidad y el tensor de Cotton

A partir de los Lemas 1.17 y 1.18 obtenemos los siguientes resultados.

Lema 1.20. [41] *Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión 4 y singnatura neutra. Si M es autodual entonces para toda base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de T_pM y para todo $z \in T_pM$ se tiene*

$$\mathfrak{C}(e_1, e_i, z) = \sigma_{ijk}\epsilon_j\epsilon_k\mathfrak{C}(e_j, e_k, z).$$

Lema 1.21. [41] *Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión 4 y signatura neutra. Si M es autodual entonces para toda base pseudo-ortonormal $\{t, u, v, w\} \in T_pM$ y para toda $z \in T_pM$ se tiene*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(t, v, z) &= \mathfrak{C}(u, w, z), \\ \mathfrak{C}(t, w, z) &= 0, \\ \mathfrak{C}(u, v, z) &= 0. \end{aligned}$$

1.7. El operador de Jacobi

La importancia del tensor de curvatura se debe al hecho de que éste codifica la mayor parte de la geometría de una variedad. Sin embargo, su complejidad motiva su estudio a partir de ciertos operadores que se definen a partir del propio tensor, por ejemplo el operador de Jacobi.

Definición 1.22. Sea V un espacio vectorial dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y A un tensor curvatura algebraico sobre V. Dado $z \in V$ fijo, el *operador de Jacobi* asociado a z se define como la aplicación lineal

$$\mathcal{J}_A(z) \colon V \to V, \quad \mathcal{J}_A(z)(x) \mapsto (A(\cdot, z)z)x = A(x, z)z.$$

Es posible restringir el dominio de este operador a $z^\perp$. Por las propiedades de curvatura para $z \neq 0$, $\langle A(x, z)z, z\rangle = A(x, z, z, z) = 0$ por lo tanto $A(x, z)z \in z^\perp$ y $A(z, z)z = 0$. Observemos que este operador es autoadjunto, en efecto:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}_A(z)(x), y\rangle &= \langle A(x, z)z, y\rangle \\ &= A(x, z, z, y) \\ &= A(y, z, z, x) \\ &= \langle A(y, z)z, x\rangle \\ &= \langle x, \mathcal{J}_A(z)(y)\rangle. \end{aligned}$$

Notemos también que si $z \in S(V)$, $\mathcal{J}_A(z)$ es el operador de Jacobi y $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ es una base ortonormal para $z^\perp$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathcal{J}_A(z) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, x_i\rangle \langle \mathcal{J}_A(z)x_i, x_i\rangle, \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, x_i\rangle \langle A(x_i, z)z, x_i\rangle, \\ &= \rho(z, z). \end{aligned}$$

Si $x \in z^\perp$ es un vector unitario no nulo, entonces el plano $\pi = \langle\{x, z\}\rangle$ es un plano no degenerado de V, esto es, la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al plano π es no degenerada. En consecuencia, la curvatura seccional de π es:

$$\begin{aligned} K(\pi) &= \frac{\langle A(x,z)z, x\rangle}{\langle x,x\rangle\langle z,z\rangle - \langle x,z\rangle^2} \\ &= \frac{\langle \mathcal{J}_A(z)x, x\rangle}{\langle x,x\rangle\langle z,z\rangle}. \end{aligned}$$

En particular, si nos restringimos al caso definido positivo, los autovalores del operador de Jacobi representan los valores extremos de la curvatura seccional de todos los planos que contienen a z.

1.7.1. Variedades de Osserman

Sea A un tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial con producto interior $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ de signatura $(\nu, n-\nu)$. Diremos que $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es *espacial Osserman* (respectivamente *temporal Osserman*) si los autovalores, posiblemente complejos, del operador de Jacobi asociado $\mathcal{J}_A$ son constantes en la pseudo-esfera espacial $S^+(V)$ (respectivamente, en la pseudo-esfera temporal $S^-(V)$). Asumiendo $\nu > 0$ y $n-\nu > 0$, ambas condiciones son equivalentes [21]. En lo que sigue cuando una de las anteriores condiciones se satisfaga diremos que $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es *Osserman*.

En un contexto puramente geométrico debemos diferenciar en primer lugar entre las condiciones de Osserman puntual y global. Diremos que una variedad pseudo-riemanniana (M, g) es *puntualmente Osserman* si los autovalores de los operadores de Jacobi $\mathcal{J}_A(x)$ no dependen del vector espacial unitario $x \in S_p^+(M)$ pero pueden cambiar de punto a punto. En el caso en que los autovalores de los operadores de Jacobi no varíen de un punto a otro diremos que (M, g) es *globalmente Osserman*. Claramente toda variedad pseudo-riemanniana isotrópica es globalmente Osserman. De este modo, los espacios de curvatura constante, las variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante o las variedades para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante son ejemplos de variedades globalmente Osserman.

Dado que el tensor de Ricci de una variedad pseudo-riemanniana se obtiene a partir de la traza de los operadores de Jacobi $\rho(x, x) = \operatorname{tr} \mathcal{J}_A(x)$, toda variedad puntualmente Osserman es necesariamente de Einstein y en consecuencia tiene curvatura seccional constante en dimensión dos y tres. En tal caso las condiciones de ser puntual y globalmente Osserman resultan equivalentes. Por lo tanto, la dimensión más baja en la que la condición de Osserman no es trivial es para $n = 4$.

Motivado por el hecho de que la condición de Osserman no es invariante por transformaciones conformes, en [6] se ha iniciado el estudio de las variedades *conforme Osserman* como aquellas que verifican la condición puntual de Osserman para el operador de Jacobi asociado al tensor de Weyl $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(x) = \mathcal{W}(\cdot, x)x$. Dado que el tensor de Weyl de tipo $(1, 3)$ es invariante por transformaciones conformes y que estas simplemente producen un rescalamiento de la pseudo-esfera espacial o temporal unitaria en cada espacio tangente, la condición de Osserman conforme es invariante por transformaciones conformes.

Como el tensor curvatura de Weyl se anula en dimensión tres, las variedades conforme Osserman son no triviales a partir de dimensión $n = 4$. Además, en tal dimensión se han caracterizado de la siguiente forma

Teorema 1.23. [2] *Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión 4. Entonces (M, g) es conforme Osserman si y sólo si es autodual o anti-autodual.*

Es importante señalar que la propiedad conforme Osserman no proporciona información sobre el tensor de Ricci, dado que la traza del tensor de Weyl es nula. Como consecuencia del resultado anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.24. [25] *Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión 4. Entonces (M, g) es puntualmente Osserman si y sólo si es Einstein y autodual o anti-autodual.*

Aunque la descripción de las variedades de Osserman es todavía un problema abierto, en ciertas situaciones se conoce una clasificación completa.

Teorema 1.25. [18] *Sea (M, g) una variedad globalmente Osserman Riemanniana de dimensión 4. Entonces (M, g) es localmente isométrica a un espacio de curvatura seccional constante o una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.*

Es importante puntualizar respecto al resultado anterior que no se conoce todavía una respuesta si se reemplaza la condición global de Osserman por la condición puntual. De hecho, existe un buen número de ejemplos de variedades puntualmente Osserman que no son globalmente Osserman (ver [19]). En contraposición, la situación Lorentziana es extremadamente rígida, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.26. [5, 21] *Sea (M, g) una variedad Lorentziana. Entonces (M, g) es puntualmente Osserman si y solo si es de curvatura seccional constante.*

1.8. El tensor de Bach

Sea $\widetilde{g} = \varphi^{-2} g$ una métrica conformemente equivalente y sea $\varphi = e^{\phi}$. Denotemos por $\widetilde{\mathcal{W}}$ y $\operatorname{div} \widetilde{\mathcal{W}}$ al tensor de Weyl y su divergencia respectivamente con respecto a la métrica $\widetilde{g}$. El comportamiento conforme de la divergencia del tensor de Weyl está dado por la siguiente ecuación:

$$\operatorname{div} \widetilde{\mathcal{W}}(X, Y, Z) = (\operatorname{div} \mathcal{W})(X, Y, Z) + (3 - n)\mathcal{W}(X, Y, Z, \nabla\phi).$$

Si $\widetilde{g} = e^{-2\phi} g$ es una métrica Einstein, entonces

$$\operatorname{div}_4 \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot) + (3 - n)\mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot, \nabla\phi) = 0 \tag{1.5}$$

pues una variedad Einstein pseudo-riemanniana de dimensión mayor igual a 4 tiene tensor de Weyl armónico (ver [31]). Sea $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ una base ortonormal con $g(E_i, E_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$ y $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$. Para el tensor de Ricci ρ, denotemos por $\mathcal{W}[\rho]$ el siguiente tensor de tipo $(0, 2)$:

$$\mathcal{W}[\rho](X, Y) = \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \mathcal{W}(E_i, X, Y, E_j)\rho(E_j, E_i).$$

Si tomamos la divergencia div_1 con respecto al primer argumento de la Ecuación (1.5), obtenemos

$$\operatorname{div}_1 \operatorname{div}_4 \mathcal{W} + \frac{n-3}{n-2}\mathcal{W}[\rho] - (n-3)(n-4)\mathcal{W}[d\phi \otimes d\phi] = 0,$$

donde $\mathcal{W}[d\phi \otimes d\phi](X, Y) = \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \mathcal{W}(E_i, X, Y, E_j) d\phi(E_i) \otimes d\phi(E_j)$, lo que motiva la siguiente definición:

Definición 1.27. Para una variedad pseudo-riemanniana (M, g) de dimensión $n \geq 4$, definimos el *tensor de Bach* como

$$\mathfrak{B} = \operatorname{div}_1 \operatorname{div}_4 \mathcal{W} + \frac{n-3}{n-2}\mathcal{W}[\rho].$$

La descripción del tensor de Bach en coordenadas viene dada por

$$\mathfrak{B}_{ij} = \nabla^k \nabla^l \mathcal{W}_{kijl} + \frac{1}{2}\rho^{kl}\mathcal{W}_{kijl},$$

o equivalentemente

$$\mathfrak{B}_{ij} = \frac{1}{n-2}\left\{\sum_{k,\alpha}^{n} g^{k\alpha}(\nabla_\alpha \mathfrak{C})_{kij} + \sum_{k,l=1}^{n}\left(\rho_{k,l}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{k\alpha}g^{l,\beta}\mathcal{W}_{i\alpha j\beta}\right)\right\}.$$

En dimensión 4, el tensor de Bach es simétrico, con traza cero, divergencia cero y conformemente invariante, es decir, si $\widetilde{g} = \varphi^{-2}g$, entonces $\mathfrak{B}_{\widetilde{g}} = \varphi^2\mathfrak{B}_g$. Si M es una variedad compacta, el tensor de Bach es el gradiente del funcional

$$\mathcal{W}(g) = \int_M \|W_g\|^2 dV_g$$

Definición 1.28. Diremos que una métrica es *Bach-llana* si se satisafce que $\mathfrak{B} = 0$.

La condición anterior es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional $\mathcal{W}$, en particular las métricas que son localmente conforme Einstein son métricas Bach-llanas. En el caso Riemanniano, las métricas semi-conformemente llanas son también Bach llanas pero no son *weakly-generic*. Una métrica se dice *weakly-generic* si $\mathcal{W}(X,\cdot,\cdot,\cdot) = 0$ se cumple si y sólo si $X = 0$, es decir, el tensor de Weyl visto como la aplicación $TM \to \otimes^3 TM$ es inyectiva.

El origen del tensor de Bach [3] se debe a una condición de integrabilidad para que un espacio de dimensión 4 sea conforme a un espacio Einstein. Si (M, g) es Einstein, se sigue trivialmente de la Definición 1.27 que $\mathfrak{B} = 0$. Como $\mathfrak{B}$ es invariante conforme en dimensión 4, toda variedad conforme Einstein de dimensión 4 será necesariamente Bach llana.

Capítulo 2

Espacios homogéneos no reductivos en dimensión 4

En este capítulo estudiaremos la clasificación de las variedades homogéneas, pseudo-riemannianas no reductivas de dimensión 4 dada por Fels y Renner (ver [20]). En cada caso $M = G/H$, especificamos el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G, la subálgebra $\mathfrak{h}$ correspondiente al subgrupo H y el subespacio complementario $\mathfrak{m}$, así como la expresión en coordenadas de la métrica.

2.1. Descomposición reductiva

Una *variedad homogénea* es una variedad M sobre la que actúa por la izquierda un grupo de Lie G de forma transitiva, es decir, para todo $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $gp = q$. Por lo tanto, una variedad homogénea puede identificarse con el cociente G/H, donde H es el subgrupo de isotropía de un punto $m \in M$. El subgrupo H es cerrado pero no necesariamente conexo. Recíprocamente, cualquier subgrupo cerrado H de un grupo de Lie G define una variedad homogénea $M = G/H$ tal que la proyección natural de G sobre G/H es diferenciable.

Sea $M = G/H$ una variedad homogénea y $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ las álgebras de Lie de G y H respectivamente.

Proposición 2.1. [27] *M se dice reductivo si el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ puede realizarse como la suma directa de subespacios vectoriales $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es el subespacio $\mathrm{Ad}(H)$-invariante sobre $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.*

Nótese que $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ implica que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Si H es conexo, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ implica $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Además si H es compacto, una descomposición de este tipo siempre existe ya que es posible tomar $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$ con respecto a un producto interior $\mathrm{Ad}(H)$-invariante sobre $\mathfrak{g}$.

Definición 2.2. Una métrica Riemanniana g en G/H se dice G-*invariante* si la acción

$$t_r \colon G/H \to G/H, \quad t_r(sH) = rsH$$

es una isometría para todo $r \in G$. En este caso diremos que $(G/H, g)$ es un espacio homogéneo de Riemann.

Si G/H es un espacio homogéneo reductivo que admite una métrica pseudo-riemmanniana con G actuando por isometrías, el tensor de curvatura $\mathcal{R}$ toma una forma particularmente simple. En este caso, la geometría de estos espacios puede estudiarse más fácilmente. Por otro lado, se conoce poco sobre la estructura de las variedades homogéneas pseudo-riemannianas no reductivas. En la siguiente sección estudiaremos los espacios homogéneos no reductivos en dimensión 4.

2.2. Clasificación de Fels y Renner

Sea $M = G/H$, denotaremos por $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ al par de álgebras de Lie correspondientes a G y H respectivamente. Las álgebras de Lie de dimensiones bajas han sido clasificadas en [38]. Siguiendo su notación, serán especialmente relevantes para nuestro trabajo las correspondientes a:

- $A^1_{4,9}$ es un álgebra de Lie resoluble, donde los productos distintos de cero son:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_3.$$

- $A_{5,30}$ es un álgebra de Lie resoluble, donde los productos distintos de cero son:

$$\begin{aligned} &[e_2, e_4] = e_1, && [e_3, e_4] = e_2, && [e_1, e_5] = (\alpha + 1)e_1, \\ &[e_2, e_5] = \alpha e_2, && [e_3, e_5] = (\alpha - 1)e_3, && [e_4, e_5] = e_4. \end{aligned}$$

- $A_{5,36}$ es un álgebra de Lie resoluble, donde lo productos distintos de cero son:

$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_1, e_4] = e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_2, e_5] = -e_2, \qquad [e_3, e_5] = e_3.$$

- $A_{5,37}$ es un álgebra de Lie resoluble, donde los productos distintos de cero son:

$$\begin{aligned} &[e_2, e_3] = e_1, && [e_1, e_4] = 2e_1, && [e_2, e_4] = e_2, \\ &[e_3, e_4] = e_3, && [e_2, e_5] = -e_3, && [e_3, e_5] = e_2. \end{aligned}$$

Teorema 2.3. [20] *Sea (M,g) una variedad Lorentziana homogénea de dimensión 4, donde H es conexo. Si M es no reductiva, entonces el par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ es isomorfo a uno de la siguiente lista.*

(A1) *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es el álgebra 5-dimensional $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}(2)$, donde $\mathfrak{s}(2)$ es el álgebra resoluble 2-dimensional. Existe una base $\{e_1, \ldots, e_5\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que los productos distintos de cero son:*

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_4.$$

Las subálgebras son $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_3 + e_4\}$ y $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_5, u_4 = e_3 - e_4\}$.

(A2) *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la familia 1-paramétrica de algebras de Lie resolubles 5-dimensionales $A_{5,30}$. Existe una base $\{e_1, \ldots, e_5\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que los productos distintos de cero son:*

$$\begin{aligned} &[e_1, e_5] = (\alpha + 1)e_1, && [e_2, e_4] = e_1, && [e_2, e_5] = \alpha e_2, \\ &[e_3, e_4] = e_2, && [e_3, e_5] = (\alpha - 1)e_3, && [e_4, e_5] = e_4, \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Las subálgebras son $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_4\}$ y $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_3, u_4 = e_5\}$.

(A3) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es una de las algebras de Lie 5-dimensionales* $A_{5,37}$*,* $A_{5,36}$*. Existe una base* $\{e_1, \ldots, e_5\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que los productos distintos de cero son:*

$$[e_1, e_4] = 2e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_2, e_5] = -\epsilon e_3, \qquad [e_3, e_4] = e_3, \qquad [e_3, e_5] = e_2,$$

con $\epsilon = 1$ *para* $A_{5,37}$ *y* $\epsilon = -1$ *para* $A_{5,36}$*. Las subálgebras son* $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_3\}$ *y* $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_4, u_4 = e_5\}$.

(A4) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es el algebra de Lie 6-dimensional de Schrödinger* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{n}(3)$*, donde* $\mathfrak{n}(3)$ *es el álgebra de Heisenberg 3-dimensional. Existe una base* $\{e_1, \ldots, e_6\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que los productos distintos de cero son:*

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \qquad [e_1, e_3] = -2e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_1, e_4] = e_4,$$
$$[e_1, e_5] = -e_5, \qquad [e_2, e_5] = e_4, \qquad [e_3, e_4] = e_5, \qquad [e_4, e_5] = e_6.$$

Las subálgebras son $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_3 + e_6, h_2 = e_5\}$ *y* $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_3 - e_6, u_4 = e_4\}$.

(A5) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es el álgebra 7-dimensional* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes A^1_{4,9}$*. Existe una base* $\{e_1, \ldots, e_7\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que los productos distintos de cero son:*

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \qquad [e_1, e_3] = -2e_3, \qquad [e_1, e_5] = -e_5, \qquad [e_1, e_6] = e_6,$$
$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_5] = e_6, \qquad [e_3, e_6] = e_5, \qquad [e_4, e_7] = 2e_4,$$
$$[e_5, e_6] = e_4, \qquad [e_5, e_7] = e_5, \qquad [e_6, e_7] = e_6.$$

Las subálgebras son $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_1 + e_7, h_2 = e_3 - e_4, h_3 = e_5\}$ *y* $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1 - e_7, u_2 = e_2, u_3 = e_3 + e_4, u_4 = e_6\}$.

El siguiente teorema nos da una lista de álgebras cuando la signatura de la variedad es $(2, 2)$.

Teorema 2.4. [20] *Sea* (M, g) *una variedad pseudo-riemanniana, homogénea de dimensión 4 y signatura* $(2, 2)$*, donde* H *es conexo. Si* M *es no reductivo, entonces el par* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *es isomorfo a uno de la siguiente lista.*

(A1) – (A3) *Los correspondientes pares de álgebras de Lie en el Teorema 2.3.*

(B1) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es el álgebra 5-dimensional* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$*. Existe una base* $\{e_1, \ldots, e_5\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que los productos distintos de cero son:*

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = e_4,$$

$$[e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5.$$

Las subálgebras son $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_3\}$ *y* $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_4, u_4 = e_5\}$.

(B2) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es el álgebra 6-dimensional de Schrödinger* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{n}(3)$ *como en* (A4) *del Teorema 2.3, con las subálgebras* $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{h_1 = e_3 - e_6, h_2 = e_5\}$ *y* $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = e_3 + e_6, u_4 = e_4\}$.

(B3) *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es el álgebra 7-dimensional* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$. *Existe una base* $\{e_1,\ldots,e_7\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que los productos distintos de cero son:*

$$[e_1,e_2]=2e_2, \quad [e_1,e_3]=-2e_3, \quad [e_2,e_3]=e_1, \quad [e_1,e_4]=e_4,$$

$$[e_1,e_5]=-e_5, \quad [e_2,e_5]=e_4, \quad [e_3,e_4]=e_5.$$

Las subálgebras son $\mathfrak{h}=\mathrm{span}\{h_1=e_3, h_2=e_5+e_6\}$ *y* $\mathfrak{m}=\mathrm{span}\{u_1=e_1, u_2=e_2, u_3=e_3, u_4=e_4\}$.

El siguiente teorema nos da una clasificación completa cuando el espacio es simplemente conexo.

Teorema 2.5. [20] *Sea* (M,g) *un espacio homogéneo, pseudo-riemanniano simplemente conexo, no reductivo de dimensión 4, entonces*

(i) M *es difeomorfo a* $\mathbb{R}^4$.

(ii) *Si* G *es el grupo de isometrías completo entonces el par de álgebras de Lie para* G/H *es equivalente a una de las álgebras del Teorema 2.3 excluyendo a* (A5)*, o a una de las álgebras del Teorema 2.4.*

Inversamente para todo par de álgebras de Lie en el Teorema 2.3 excepto para (A5) *o para algún álgebra en el Teorema 2.4, existe una métrica pseudo-riemanniana en* $\mathbb{R}^4$ *(sujeta a las condiciones de signatura), donde el grupo de isometrías actúa transitivamente en* $\mathbb{R}^4$. *El álgebra de Lie del grupo de simetrías está dado por el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *y el álgebra de Lie de la isotropía en un punto es* $\mathfrak{h}$.

Los Teoremas 2.3 y 2.4 fueron utilizados por Fels y Renner para obtener una descripción de las variedades homogéneas no reductivas de Einstein. Sin embargo, dicha clasificación resulta ser incompleta, por lo que en este trabajo analizaremos con detalle la clasificación en el Capítulo 3.

2.3. Descripción en coordenadas

Dado que estamos interesados en la existencia de métricas conforme Einstein, hemos de estudiar la existencia de soluciones de la ecuación conforme Einstein (1.3). La descripción que nos proporcionan los Teoremas 2.3 y 2.4 no resulta especialmente cómoda, pues las posibles soluciones en principio no serán compatibles con la estructura de las álgebras de Lie. Por ello, a continuación analizaremos una descripción alternativa en coordenadas. En la sección anterior vimos que los espacios homogéneos $M=G/H$ pseudo-riemannianos simplemente conexos de dimensión 4 son difeomorfos a $\mathbb{R}^4$. Más aún, con excepción de (A5), para cada tipo existe un métrica homogénea en $\mathbb{R}^4$ con el correspondiente grupo de isometrías G. En esta sección, daremos una descripción explícita en coordenadas de las métricas homogéneas en G/H. Es bien conocido que todo elemento en un grupo de Lie conexo G puede escribirse como un producto finito de exponenciales de elementos de $\mathfrak{g}$. Para los grupos de Lie conexos de variedades homogéneas pseudo-riemannianas no reductivas, se puede mostrar que todo elemento de G puede escribirse como un producto finito de exponenciales de elementos de la base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada en [20] y descrita en la sección anterior.

Proposición 2.6. [13] *Sea* $M=G/H$ *una variedad homogénea pseudo-riemanniana, no reductiva de dimensión 4 (excepto* (A5)*), donde* G *es un grupo de Lie conexo. Entonces* *existe una carta local* $\sigma\colon U \to G$ *definida en una vecindad* U *de la identidad en* G*, tal que* $\sigma(x_1,\ldots,x_r) = \exp(x_1u_1)\cdots\exp(x_4u_4)\exp(x_5h_1)\cdots\exp(x_rh_s)$*, donde* r *y* s *son las dimensiones de* G *y* H *respectivamente y la base* $\{u_1,\ldots,u_4,h_1,\ldots,h_s\}$ *del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *está descrita en la sección anterior.*

Demostración. Para cada variedad homogénea pseudo-riemanniana no reductiva de dimensión 4 $M = G/H$ (excepto para (A5)), determinamos una expresión matricial para cada elemento de la base $\{u_1,u_2,u_3,u_4,h_1,\ldots,h_s\}$ de $\mathfrak{g}$. Denotemos por E^n_{ij} la matriz cuadrada $(n\times n)$ cuya entrada (i,j) es igual a 1 y las demás entradas son 0. Entonces tenemos la siguiente expresión matricial para la base $\{u_1,u_2,u_3,u_4,h_1,\ldots,h_s\}$ de $\mathfrak{g}$:

(A1)

$$\begin{aligned}
&h_1 = -E^5_{12}+E^5_{41}+E^5_{51}-\frac{1}{2}(E^5_{43}-E^5_{53}), && \\
&u_1 = 2E^5_{22}-(E^5_{44}+E^5_{45}+E^5_{54}+E^5_{55}), && u_2 = E^5_{14}+E^5_{15}-2E^5_{21}, \\
&u_3 = -\frac{1}{2}(E^5_{44}-E^5_{45}-E^5_{54}+E^5_{55}), && u_4 = -E^5_{12}+E^5_{41}+E^5_{51}+\frac{1}{2}(E^5_{43}-E^5_{53}).
\end{aligned}$$

(A2) $(\alpha \neq -1)$

$$\begin{aligned}
&h_1 = -E^5_{12}-E^5_{23}-E^5_{54}, && \\
&u_1 = (\alpha+1)E^5_{14}, && u_2 = E^5_{15}+\alpha E^5_{24}, \\
&u_3 = E^5_{25}+(\alpha-1)E^5_{34}, && u_4 = -(\alpha+1)E^5_{11}-\alpha E^5_{22}+(1-\alpha)E^5_{33}-E^5_{55}.
\end{aligned}$$

(A2) $(\alpha = -1)$

$$\begin{aligned}
&h_1 = -E^5_{12}-E^5_{23}+E^5_{54}, && \\
&u_1 = 2E^5_{14}, && u_2 = E^5_{15}+E^5_{24}, \\
&u_3 = E^5_{25}, && u_4 = E^5_{22}+2E^5_{33}-E^5_{55}.
\end{aligned}$$

(A3) $(\epsilon = \pm 1)$

$$\begin{aligned}
&h_1 = -E^5_{12}+E^5_{24}+E^5_{53}, && \\
&u_1 = 2E^5_{13}, && u_2 = E^5_{15}+E^5_{23}-\epsilon E^5_{54}, \\
&u_3 = -2E^5_{11}-E^5_{22}-E^5_{55}, && u_4 = -E^5_{55}+\epsilon E^5_{52}.
\end{aligned}$$

(A4)

$$\begin{aligned}
&h_1 = E^4_{24}+2E^4_{31}, && h_2 = E^4_{21}-E_{34}, \\
&u_1 = E^4_{11}-E^4_{33}, && u_2 = \frac{1}{2}E^4_{13}, \\
&u_3 = -E^4_{24}+2E^4_{31}, && u_4 = -\frac{1}{2}(E^4_{14}+E^4_{23}).
\end{aligned}$$

(B1)

$$\begin{aligned}
&h_1 = -E^5_{12}+E^5_{43}+2E^5_{51}, && \\
&u_1 = 2(E^5_{22}-E^5_{55})+E^5_{33}-E^5_{44}, && u_2 = E^5_{15}-2E^5_{21}+E^5_{34}, \\
&u_3 = -E^5_{31}-E^5_{45}, && u_4 = -E^5_{32}+E^5_{41}.
\end{aligned}$$

(B2)

$$h_1 = -E_{24}^4 + 2E_{31}^4, \qquad h_2 = E_{21}^4 - E_{34}^4,$$
$$u_1 = E_{11}^1 - E_{33}^4, \qquad u_2 = \frac{1}{2}E_{13}^4,$$
$$u_3 = E_{24}^4 + 2E_{31}^4, \qquad u_4 = -\frac{1}{2}(E_{14}^4 + E_{23}^4).$$

(B3)

$$h_1 = E_{14}^6 + E_{22}^6 + E_{33}^6 + E_{54}^6 + E_{66}^6, \qquad h_2 = E_{14}^6 - E_{23}^6 - 2E_{62}^6,$$
$$u_1 = -E_{14}^6 - E_{23}^6 - 2E_{62}^6, \qquad u_2 = E_{11}^6 - E_{15}^6 - 2E_{33}^6 - E_{44}^6 + 2E_{66}^6,$$
$$u_3 = E_{26}^6 + 2E_{32}^6 - E_{41}^6 + E_{45}^6, \qquad u_4 = E_{11}^6 - E_{15}^6 + E_{51}^6 - E_{55}^6.$$

A continuación debemos calcular la representación de la matriz correspondiente para G. Entonces todo elemento de $g \in G$ correspondiente a los parámetros $x_1, \ldots, x_r$ está dado por:

$$\exp(x_1 u_1) \cdots \exp(x_4 u_4) \exp(x_5 h_1) \cdots \exp(x_r h_s),$$

y por lo tanto podemos definir una carta local $\sigma\colon U \to G$, dada por $\sigma(x_1, \ldots, x_r) = \exp(x_1 u_1) \cdots \exp(x_4 u_4) \exp(x_5 h_1) \cdots \exp(x_r h_s)$. □

La proposición anterior nos permite obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.7. [14, 13] *Sea M una variedad homogénea pseudo-riemanniana, no reductiva de dimensión 4. Si M no es del tipo* (A5)*, entonces es localmente isométrica a $\mathbb{R}^4$, equipada con una métrica pseudo-riemanniana g, la cual toma la siguiente expresión:*

(A1) $\mathbb{R}^4$ *con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =& (4bx_2^2 + a)dx_1^2 + 4bx_2 dx_1 x_2 - (4ax_2x_4 - 4cx_2 + a)dx_1dx_3 \\ &+ 4ax_2dx_1dx_4 + bdx_2^2 - 2(ax_4 - c)dx_2dx_3 + 2adx_2dx_4 + qdx_3^2, \end{aligned}$$

donde a, b, c y q son constantes arbitrarias con $a(a - 4q) \neq 0$.

(A2) $\mathbb{R}^4$ *con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =& -2ae^{2\alpha x_4}dx_1dx_3 + ae^{2\alpha x_4}dx_2^2 + be^{2(\alpha-1)x_4}dx_3^2 \\ &+ 2ce^{(\alpha-1)x_4}dx_3dx_4 + qdx_4^2, \end{aligned}$$

donde a, b, c, q y α son constantes arbitrarias con $aq \neq 0$.

(A3) *Un subconjunto $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y tensor métrico:*

$$g_+ = 2ae^{2x_3}dx_1dx_4 + ae^{2x_3}\cos(x_4)^2dx_2^2 + bdx_3^2 + 2cdx_3dx_4 + qdx_4^2,$$

donde a, b, c y q son constantes arbitrarias con $ab \neq 0$ y el subconjunto abierto $\mathfrak{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \cos(x_4) \neq 0\}$, o

$$g_- = 2ae^{2x_3}dx_1dx_4 + ae^{2x_3}\cosh(x_4)^2dx_2^2 + bdx_3^2 + 2cdx_3dx_4 + qdx_4^2,$$

donde a, b, c y q son constantes arbitrarias con $ab \neq 0$ y $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^4$.

(A4) $\mathbb{R}^4$ *con coordenadas* (x_1, x_2, x_3, x_4) *y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =& \Big(\frac{a}{2}x_4^2 + 4bx_2^2 + a\Big) dx_1^2 + 4bx_2 dx_1 dx_2 + ax_2(4 + x_4^2)dx_1 dx_3 \\ &+ a(1 + 2x_2x_3)x_4 dx_1 dx_4 + bdx_2^2 + \frac{a}{2}\left(4 + x_4^2 dx_2 dx_3\right) \\ &+ ax_3x_4 dx_2 dx_4 + \frac{a}{2} dx_4^2, \end{aligned}$$

donde a *y* b *son constantes arbitrarias con* $a \neq 0$.

(B1) $\mathbb{R}^4$ *con coordenadas* (x_1, x_2, x_3, x_4) *y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =&(q(x_3^2 + 4x_3x_2x_4 + 4x_2^2x_4^2)4cx_2x_3 + 8cx_2^2x_4 + 2ax_3 + 4bx_2^2)dx_1^2 \\ &+ 2(q(x_3x_4 + 2x_2x_4^2) + 4cx_2x_4 + cx_3 + 2bx_2)dx_1dx_2 \\ &+ 2(q(x_3 + 2x_2x_4) + 2cx_2 + a)dx_1dx_3 + 4ax_2dx_1dx_4 \\ &+ (qx_4^2 + 2cx_4 + b)dx_2^2 + 2(qx_4 + c)dx_2dx_3 + 2adx_2dx_4 + qdx_3^2, \end{aligned}$$

donde a, b, c *y* q *son constantes arbitrarias con* $a \neq 0$.

(B2) $\mathfrak{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \neq \pm 2\}$ *con coordenadas* (x_1, x_2, x_3, x_4) *y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =& \left(a - \frac{ax_4^2}{2} + 4bx_2^2\right) dx_1^2 + 4bx_2dx_1dx_2 - ax_2(x_4^2 - 4)dx_1dx_3 \\ &- a(1 + 2x_2x_3)x_4dx_1dx_4 + bdx_2^2 - \frac{1}{2}a(x_4^2 - 4)dx_2dx_3 \\ &- ax_3x_4dx_2dx_4 - \frac{1}{2}adx_4^2, \end{aligned}$$

donde a *y* b *son constantes arbitrarias con* $a \neq 0$.

(B3) $\mathbb{R}^4$ *con coordenadas* (x_1, x_2, x_3, x_4) *y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =& - 2ae^{-x^2}x_3dx_1dx_2 + 2ae^{-x_2}dx_1dx_3 + 2(2bx_3^2 - ax_4)dx_2^2 \\ &- 4bx_3dx_2dx_3 + 2adx_2dx_4 + bdx_3^2, \end{aligned}$$

donde a *y* b *son constantes arbitrarias con* $a \neq 0$.

Si M *es del tipo* (A5) *entonces*

(A5) *Existe una constante real* $a \neq 0$, *tal que* M *es localmente isométrica a* $(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}^2$ *con coordenadas* (x_1, x_2, x_3, x_4) *y tensor métrico:*

$$\begin{aligned} g =& - \frac{ax_4}{4x_2}dx_1dx_2 + \frac{a}{4}dx_1dx_4 + \frac{a(2 + 2x_4x_1 + x_3^2)}{8x_2^2}dx_2dx_2 \\ &+ \frac{ax_3}{4x_2}dx_2dx_3 - \frac{ax_1}{4x_2}dx_2dx_4 + \frac{a}{8}dx_3^2, \end{aligned}$$

donde $x_2 \neq 0$.

Es importante enfatizar que los espacios (A1)-(A3) admiten métricas de signatura neutra y Lorentziana dependiendo de los valores de las constantes definidas en las correspondientes métricas. Las métricas (A4) y (A5) son siempre Lorentzianas, mientras que (B1)-(B3) son de signatura neutra $(2, 2)$.

2.4. Geometría de los espacios homogéneos no reductivos en dimensión 4

Como vimos anteriormente, Fels y Renner [20] clasificaron los espacios Einstein homogéneos no reductivos de dimensión 4, mostrando que deberían ser del tipo (A2) o (B3). Sin embargo, el siguiente teorema nos muestra que existen algunas posibilidades para el tipo (B1).

Teorema 2.8. *Sea (M, g) un espacio homogéneo no reductivo de dimensión 4. Entonces (M, g) es Einstein si y sólo si, (M, g) tiene curvatura seccional constante o corresponde a uno de los siguientes:*

(i) *Tipo* (A2) *con* $\alpha = \frac{2}{3}$.

(ii) *Tipo* (B1) *con* $q = c = 0 \neq b$ *ó* $q \neq 0$ *y* $b = \frac{c^2}{q}$.

(iii) *Tipo* (B3) *con* $b \neq 0$.

En todos los casos, la variedad es de signatura neutra.

Nuestro propósito es estudiar la geometría conforme de estos espacios para describir todos los espacios conforme Einstein homogéneos no reductivos. Claramente, los casos Einstein mencionados anteriormente así como los casos localmente conformemente llanos descritos anteriormente en [15] deben ser descartados, pues todos ellos son conforme Einstein.

Teorema 2.9. *Sea (M, g) un espacio homogéneo no reductivo de dimensión 4. Entonces (M, g) es localmente conformemente llano si y sólo si, es de curvatura seccional constante o bien corresponde a uno de los siguientes casos:*

(i) *Tipo* (A1) *con* $b = 0$.

(ii) *Tipo* (A2) *con* $\alpha = 2$ *y* $b \neq 0$.

Como vimos en la Sección 1.8, las métricas Bach llanas son puntos críticos del funcional $\mathcal{W}$ y se tiene que las métricas localmente conforme Einstein son Bach llanas. Las métricas Bach llanas homogéneas no reductivas de dimensión 4 vienen dadas por:

Teorema 2.10. *Sea (M, g) un espacios homogéneo no reductivo de dimensión 4. Entonces (M, g) es Bach llano si y sólo si, es localmente conformemente llano, es Einstein o bien corresponde a uno de los siguientes casos:*

(i) *Tipo* (A1) *con* $q = 0$ *y* $b \neq 0$ *o* $q = -\frac{3a}{4}$ *y* $b \neq 0$.

(ii) *Tipo* (A2) *con* $\alpha = 1$ *y* $b \neq 0$.

(iii) *Tipo* (A3) *con* $\epsilon = \pm$ *y* $b \neq \mp q$.

(iv) *Tipo* (B1) *con* $q = 0 \neq c$.

Observación 2.11. En el teorema anterior los espacios que admiten metricas Lorentzianas únicamente son los casos (A2) y (A3), mientras que en todos los casos se admiten métricas de signatura neutra.

Observación 2.12. Un caso especial de los espacios Bach llanos es el de las variedades semi-conformemente llanas. Mientras que las métricas Lorentzianas semi-conformemente llanas son localmente conformemente llanas, existen muchos ejemplos estrictos de semi-conformemente llanos en métricas Lorentziana y de signatura neutra.

Recordemos que una variedad de dimensión 4 es semi-conformemente llana si y sólo si es *conforme Osserman* [7], esto es, el espectro del los operadores de Jacobi conforme $\mathcal{J}_{\mathcal{W}}(z)(\cdot) = \mathcal{W}(\cdot, z)z$ es constante sobre las pseudo esferas $S^{\pm}(T_pM)$ en cada punto $p \in M$, (ver [35]).

Un cálculo explícito de los operadores de Jacobi conforme muestra que una variedad homogénea no reductiva (M, g) es semi-conformemente llana y no localmente conformemente llana si y sólo si ésta corresponde a uno de los siguientes casos:

Tipo (A1) con $q = 0 \neq b$ ó $q = -\frac{3}{4}a$ y $b \neq 0$.

Tipo (B1) con $q = c = 0 \neq b$, ó $q = 0 \neq c$, ó $q \neq 0$ y $b = \frac{c^2}{q}$.

Tipo (B3) con $b \neq 0$.

Ésto coincide con la descripción de (anti-) autodualidad de los espacios homogéneos no reductivos en [15, Teorema 4.1]. Por lo tanto, los operadores de Jacobi son nilpotentes en 2 pasos en todos los casos, salvo el Tipo (B1) con $q \neq 0$ y $b = \frac{c^2}{q}$ donde son diagonalizables.

Cabe mencionar que en alguno de los casos anteriores la variedad es también Einstein y por lo tanto es puntualmente Osserman, es decir, el espectro de los operadores de Jacobi $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}(z)(\cdot) = \mathcal{A}(\cdot, z)z$ es constante sobre las pseudo esferas unitarias $S^{\pm}(T_pM)$ en cada punto $p \in M$ (ver [21]).

Capítulo 3

Curvatura de los espacios homogéneos no reductivos en dimensión 4

En este capítulo consideramos cada uno de los casos del Teorema 2.7 analizando los tensores de Ricci, de Cotton, de Weyl y de Bach. Como consecuencia, obtenemos las demostraciones de los siguientes teoremas: el Teorema 2.8 que caracteriza los espacios de Einstein; el Teorema 2.9 que caracteriza los espacios conformemente llanos y, que por lo tanto, son trivialmente conforme Einstein y por último el Teorema 2.10 que caracteriza las variedades Bach llanas. En cada caso, los resultados se seguirán de cálculos explícitos de los tensores de Ricci, Cotton, Weyl y Bach.

3.1. Métricas Lorentziana y de signatura neutra.

Con la notación del Teorema 2.7, las variedades homogéneas no reductivas de dimensión 4 que admiten tanto métricas Lorentzianas como de signatura neutra, son aquellas que corresponden a los tipos (A1), (A2) y (A3) en los Teoremas 2.3 y 2.4.

3.1.1. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (A1)

Consideremos sobre $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4), el tensor métrico

$$\begin{aligned} g = (4bx_2^2 + a)\, dx_1^2 + 4bx_2\, dx_1 dx_2 - (4ax_2x_4 - 4cx_2 + a)\, dx_1 dx_3 \\ + 4ax_2\, dx_1 dx_4 + b\, dx_2^2 - 2(ax_4 - c)\, dx_2 dx_3 + 2a\, dx_2 dx_4 + q\, dx_3^2\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dependiente de los parámetros $a, b, c, q \in \mathbb{R}$. De la expresión anterior tenemos que $\det(g) = \frac{1}{4}a^3(a - 4q)$, lo cual muestra que la métrica (3.1) es Lorentziana si $a(a - 4q) < 0$ y es de signatura neutra en otro caso. Por lo tanto la restricción $a(a - 4q) \neq 0$ en el Teorema 2.7 (A1) nos asegura que g es no degenerada. El operador de Ricci está dado por:

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8b(a+4q)x_2}{a(a-4q)} & \frac{4b(a+4q)}{a(a-4q)} & \frac{2(ax_4-c)}{a} & -2 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

de donde se sigue que (M, g) no es Einstein. Las componentes no nulas del tensor de Cotton están dadas por:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{C}_{121} = -\tfrac{24bx_2(a+4q)}{a(a-4q)}\,, \quad \mathfrak{C}_{122} = -\tfrac{12b(a+4q)}{a(a-4q)}\,, \quad \mathfrak{C}_{131} = \tfrac{64bqx_2^2}{a^2-4aq}\,, \\ &\mathfrak{C}_{132} = \mathfrak{C}_{231} = \tfrac{32bqx_2}{a^2-4aq}\,, \quad \mathfrak{C}_{232} = \tfrac{16bq}{a^2-4aq}\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las componentes no nulas del tensor de Weyl son:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_{1212} = \tfrac{8bq-6ab}{a-4q}\,, \quad \mathcal{W}_{1213} = -\tfrac{16bqx_2}{a-4q}\,, \quad \mathcal{W}_{1223} = -\tfrac{8bq}{a-4q}\,, \\ &\mathcal{W}_{1313} = -\tfrac{8bqx_2^2(a+4q)}{a(a-4q)}\,, \quad \mathcal{W}_{1323} = -\tfrac{4bqx_2(a+4q)}{a(a-4q)}\,, \quad \mathcal{W}_{2323} = -\tfrac{2bq(a+4q)}{a(a-4q)}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por lo tanto, el tensor de Bach está dado por:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -\frac{256b\,q\,(3a+4q)\,x_2^2}{a^2(a-4q)^2} & -\frac{128b\,q\,(3a+4q)x_2}{a^2(a-4q)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{128b\,q\,(3a+4q)\,x_2}{a^2(a-4q)^2} & -\frac{64b\,q\,(3a+4q)}{a^2(a-4q)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Una consecuencia inmediata de la expresión anterior es que *un espacio homogéneo no reductivo de dimensión 4 de tipo* (A1) *es Bach llano si y sólo si una de las siguientes tres condiciones se cumple:* $b = 0, q = 0$ *ó* $q = -\frac{3a}{4}$. *Mas aún, tenemos los siguientes casos:*

1. *Si* $b = 0$ *entonces* (3.4) *muestra que* (M, g) *es localmente conformemente llana.*
2. *Si* $b \neq 0$ *entonces* (M, g) *no es localmente conformemente llana ni es Einstein.*

Como toda variedad localmente conformemente llana es conforme Einstein, nuestro interés se centrará en los casos $q = 0$ y $q = -\frac{3a}{4}$ con $b \neq 0$.

3.1.2. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (A2)

Consideremos sobre $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4), el tensor métrico

$$g = -2ae^{2\alpha x_4}\, dx_1 dx_3 + ae^{2\alpha x_4} dx_2^2 + be^{2(\alpha-1)x_4} dx_3^2 + 2ce^{(\alpha-1)x_4} dx_3 dx_4 + q dx_4^2 \tag{3.6}$$

dependiente de los parámentros $a, b, c, q \in \mathbb{R}$. De la expresión anterior se sigue que $\det(g) = -a^3 q e^{6\alpha x_4}$, lo cual muestra que la métrica (3.6) es Lorentziana si $aq > 0$ y es de signatura neutra en otro caso. Entonces, la restricción $aq \neq 0$ en el Teorema 2.7 (A2) nos asegura que g es no degenerada. El operador de Ricci está dado por:

$$\mathrm{Ric} = -\frac{3\alpha^2}{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b(3\alpha-2)}{3a\alpha^2} e^{-2x_4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, (M, g) es Einstein si y sólo si $b = 0$ (con curvatura escalar $\tau = \frac{-12\alpha^2}{q}$) ó $\alpha = \frac{2}{3}$ (con curvatura escalar $\tau = -\frac{16}{3q}$) y es Ricci llana si $\alpha = 0$. La única componente no nula del tensor de Cotton está dada por:

$$\mathfrak{C}_{343} = -\frac{(\alpha-2)(3\alpha-2)\, be^{2(\alpha-1)x_4}}{q}\,. \tag{3.8}$$

Las componentes del tensor de Weyl están dadas por:

$$\mathcal{W}_{2323} = -\frac{(\alpha-2)a\, be^{2(2\alpha-1)x_4}}{2q}, \quad \mathcal{W}_{3434} = \frac{1}{2}(\alpha-2)be^{2(\alpha-1)x_4}. \tag{3.9}$$

Finalmente el tensor de Bach se expresa como:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)(3\alpha-2)be^{2(\alpha-1)x_4}}{q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Por lo tanto un *espacio homogéneo no reductivo de tipo* (A2) *es Bach llano si y sólo si cumple una de las siguientes cuatro condiciones:* $b = 0, \alpha = \frac{2}{3}, \alpha = 1$ *ó* $\alpha = 2$. Mas aún, tenemos los siguientes casos:

1. Si $b = 0$ entonces (3.7) y (3.9) muestran que la variedad es de curvatura seccional constante $K = -\frac{\alpha^2}{q}$.

2. Si $\alpha = \frac{2}{3}$ entonces $\mathcal{W}_{3434} = -\frac{2}{3}be^{-\frac{2x_4}{3}}$ y en consecuencia la variedad no es localmente conformemente llana, mientras no sea $b = 0$.

3. Si $\alpha = 1$ entonces $\mathcal{W}_{3434} = -\frac{b}{2}$, lo cual muestra que (M, g) no es localmente conformemente llana mientras no sea $b = 0$.

4. Si $\alpha = 2$ entonces (3.9) muestra que (M, g) es localmente conformemente llana pero no es Einstein, mientras no sea $b = 0$.

3.1.3. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (A3)

Para el tipo (A3) existen dos casos a considerar. Sea $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^4$ determinado por $\mathfrak{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \cos(x_4) \neq 0\}$ y el tensor métrico

$$g_+ = 2ae^{2x_3}\, dx_1 dx_4 + ae^{2x_3}\cos(x_4)^2 dx_2^2 + bdx_3^2 + 2cdx_3dx_4 + q\, dx_4^2, \tag{3.11}$$

dependiente de los parámetros $a, b, c, q \in \mathbb{R}$. Entonces $\det(g_+) = -a^3 b\cos(x_4)^2\, e^{6x_3}$ muestra que la métrica (3.11) es Lorentziana si $ab > 0$ y es de signatura neutra en otro caso. Por lo tanto, observamos que la restricción $ab \neq 0$ en el Teorema 2.7 (A3) nos asegura que g_+ es no degenerada. El operador de Ricci está dado por:

$$\mathrm{Ric} = -\frac{3}{b}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(b+q)e^{-2x_3}}{3a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

y por lo tanto (M, g) es Einstein si y sólo si $b = -q$. La única componente no nula del tensor de Cotton es

$$\mathfrak{C}_{344} = -\frac{b+q}{b}, \tag{3.13}$$

y las componentes no nulas del tensor de Weyl son:

$$\mathcal{W}_{2424} = \frac{ae^{2x_3}(b+q)\cos(x_4)^2}{2b}, \quad \mathcal{W}_{3434} = -\frac{b+q}{2}. \tag{3.14}$$

Luego (M, g_+) *es siempre Bach llana.* Más aún, por (3.14) (M, g_+) *es localmente conformemente llana si y sólo si* $b = -q$, *en cuyo caso es Einstein y por lo tanto de curvatura seccional constante* $K = \frac{1}{q}$.

Consideremos ahora el segundo caso para la métrica de tipo (A3). Sean $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^4$ y el tensor métrico:

$$g_- = 2ae^{2x_3}\, dx_1 dx_4 + ae^{2x_3} \cosh(x_4)^2 dx_2^2 + bdx_3^2 + 2cdx_3 dx_4 + q\, dx_4^2\,, \tag{3.15}$$

dependiente de los parámetros $a, b, c, q \in \mathbb{R}$. Entonces $\det(g_-) = -a^3 b \cosh(x_4)^2\, e^{6x_3}$ y por lo tanto (3.15) es Lorentziana si $ab > 0$ y es de signatura neutra en otro caso. Observemos que la restricción $ab \neq 0$ en el Teorema 2.7 (A3) nos asegura que g_- es no degenerada. El operador de Ricci está dado por:

$$\mathrm{Ric} = -\frac{3}{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(b-q)e^{-2x_3}}{3a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

y por lo tanto (M, g) es Einstein si y sólo si $b = q$. La única componente no nula del tensor de Cotton es

$$\mathfrak{C}_{344} = 1 - \frac{q}{b}\,, \tag{3.17}$$

y las componentes no nulas del tensor de Weyl son:

$$\mathcal{W}_{2424} = -\frac{ae^{2x_3}(b-q)\cosh(x_4)^2}{2b}\,, \quad \mathcal{W}_{3434} = \frac{b-q}{2}\,. \tag{3.18}$$

Luego (M, g_-) *es siempre Bach llana.* Más aún, por la Ecuación (3.18) (M, g_-) *es localmente conformemente llana si y sólo si* $b = q$, *en cuyo caso es Einstein y por lo tanto es de curvatura seccional constante* $K = -\frac{1}{q}$. En consecuencia, *toda variedad Einstein de tipo* (A3) *es necesariamente de curvatura seccional constante.*

Dado que nos interesa el caso $\mathfrak{B} = 0$ con $\mathcal{W} \neq 0$, limitaremos nuestro estudio a la situación $b \neq -\epsilon q$, con $\epsilon = \pm 1$.

3.2. Métricas Lorentzianas

Las variedades homogéneas no reductivas de dimensión 4 que admiten únicamente métricas Lorentzianas son aquellas que corresponden a los tipos (A4), (A5) en los Teoremas 2.3 y 2.4.

3.2.1. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (A4)

Consideremos sobre $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4), el tensor métrico

$$\begin{aligned} g = &\left(\tfrac{a}{2}x_4^2 + 4bx_2^2 + a\right) dx_1^2 + 4bx_2 dx_1 dx_2 + ax_2(4 + x_4^2) dx_1 dx_3 \\ &+ a(1 + 2x_2 x_3)x_4 dx_1 dx_4 + bdx_2^2 + \tfrac{a}{2}(4 + x_4^2) dx_2 dx_3 + ax_3 x_4 dx_2 dx_4 + \tfrac{a}{2} dx_4^2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

dependiente de los parámetros $a, b, c, q \in \mathbb{R}$. De la expresión anterior se sigue que $\det(g) = -\frac{1}{32}a^4(4 + x_4^2)^2$, lo cual muestra que la métrica (3.19) es Lorentziana. Observemos que la restricción $a \neq 0$ en el Teorema 2.7 (A4) nos asegura que g es no degenerada. El operador de Ricci está dado por:

$$
\mathrm{Ric} = -\frac{3}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{40bx_2}{3a(x_4^2+4)} & \frac{20b}{3a(x_4^2+4)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.20}
$$

lo que muestra que (M, g) es Einstein si y sólo si $b = 0$. Las únicas componentes no nulas del tensor de Cotton son

$$
\mathfrak{C}_{121} = \frac{30bx_2}{a}, \qquad \mathfrak{C}_{122} = \frac{15b}{a}, \tag{3.21}
$$

y las componentes no nulas del tensor de Weyl son:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{1212} = \tfrac{3}{4}b\left(x_4^2 - 2\right), \quad &&\mathcal{W}_{1214} = -\tfrac{3}{2}bx_2x_4, \quad &&\mathcal{W}_{1224} = -\tfrac{3bx_4}{4}, \\
&\mathcal{W}_{1414} = 3bx_2^2, &&\mathcal{W}_{1424} = \tfrac{3bx_2}{2}, &&\mathcal{W}_{2424} = \tfrac{3b}{4}.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

El tensor de Bach está dado por:

$$
\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -\frac{120bx_2^2}{a^2} & -\frac{60bx_2}{a^2} & 0 & 0 \\ -\frac{60bx_2}{a^2} & -\frac{30b}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.23}
$$

En consecuencia, *una métrica de tipo* (A4) *es Bach llana si y sólo si* $b = 0$*, en cuyo caso* (M, g) *es localmente conformemente llana por* (3.22) *y por lo tanto de curvatura seccional constante* $K = -\frac{1}{a}$, como muestra el operador de Ricci.

Por lo tanto, toda métrica de tipo (A4) con $b = 0$ es trivialmente conforme Einstein y en consecuencia la omitiremos en nuestro estudio posterior.

3.2.2. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (A5)

Sea $M = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}^2$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4). Consideremos el tensor métrico

$$
\begin{aligned}
g = &-\tfrac{ax_4}{4x_2}dx_1dx_2 + \tfrac{a}{4}dx_1dx_4 + \tfrac{a(2+2x_1x_4+x_3^2)}{8x_2^2}dx_2^2 \\
&- \tfrac{ax_3}{4x_2}dx_2dx_3 - \tfrac{ax_1}{4x_2}dx_2dx_4 + \tfrac{a}{8}dx_3^2,
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. De la expresión anterior se sigue que $\det(g) = -\frac{a^4}{2048x_2^2}$, por lo tanto la métrica (3.24) es Lorentziana y la restricción $a \neq 0$ en el Teorema 2.7 (A5) nos asegura que g es no degenerada. El tensor de Ricci está dado por:

$$
\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3x_4}{2x_2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3x_4}{2x_2} & -\frac{3\left(x_3^2+2x_1x_4+2\right)}{2x_2^2} & \frac{3x_3}{2x_2} & \frac{3x_1}{2x_2} \\ 0 & \frac{3x_3}{2x_2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3x_1}{2x_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.25}
$$

de donde se sigue que el operador de Ricci correspondiente es un múltiplo de la identidad, $\mathrm{Ric} = \frac{12}{a}\,\mathrm{Id}$ y en consecuencia es Einstein. Más aún, el tensor de Weyl es idénticamente nulo y por lo tanto *toda métrica de tipo* (A5) *es siempre de curvatura seccional constante* $K = -\frac{4}{a}$.

3.3. Métricas de signatura neutra

Existen tres familias distintas de variedades homogéneas no reductivas de dimensión 4 que admiten exclusivamente métricas de signatura neutra según se ha mostrado en los Teoremas 2.3 y 2.4.

3.3.1. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (B1)

Sea $M = \mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y tensor métrico

$$\begin{aligned} g = &\big(q(x_3^2 + 4x_2x_3x_4 + 4x_2^2x_4^2) + 4cx_2x_3 + 8cx_2^2x_4 + 2ax_3 + 4bx_2^2\big)\, dx_1^2 \\ &+ 2(q(x_3x_4 + 2x_2x_4^2) + 4cx_2x_4 + cx_3 + 2bx_2)dx_1dx_2 \\ &+ 2(q(x_3 + 2x_2x_4) + 2cx_2 + a)dx_1dx_3 + 4ax_2dx_1dx_4 \\ &+ (qx_4^2 + 2cx_4 + b)dx_2^2 + 2(qx_4 + c)dx_2dx_3 + 2adx_2dx_4 + qdx_3^2\,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

dependiente de los parámetros $a, b, c, q \in \mathbb{R}$. Como $\det(g) = a^4$ y la componente $g_{44} = 0$, la métrica (3.26) es de signatura neutra y la restricción $a \neq 0$ en el Teorema 2.7 (B1) nos asegura que g es no degenerada. El operador de Ricci está dado por

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{3q}{2a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3q}{2a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3q}{2a^2} & 0 \\ \frac{15}{a^3}x_2(bq - c^2) & \frac{15}{2a^3}(bq - c^2) & 0 & \frac{3q}{2a^2} \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

entonces, (M, g) es Einstein si y sólo si $c^2 - bq = 0$. Las componentes no nulas del tensor de Cotton están dadas por:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{C}_{121} = \tfrac{15x_2(6a-qx_3)(c^2-bq)}{2a^3}\,, \quad \mathfrak{C}_{122} = \tfrac{15(6a-qx_3)(c^2-bq)}{4a^3}\,, \\ &\mathfrak{C}_{232} = \tfrac{15q(c^2-bq)}{4a^3}\,, \qquad \mathfrak{C}_{131} = 4x_2^2\,\mathfrak{C}_{232}\,, \\ &\mathfrak{C}_{132} = \mathfrak{C}_{231} = 2x_2\mathfrak{C}_{232}\,, \end{aligned} \tag{3.28}$$

y las componentes no nulas del tensor de Wey están dadas por:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_{1212} = \tfrac{-6a^2(b+2cx_4+qx_4^2)+ax_3(-7bq+6c^2-qx_4(2c+qx_4))+5qx_3^2(c^2-bq)}{2a^2}\,, \\ &\mathcal{W}_{1213} = \tfrac{2x_2\left(a(7bq-6c^2+qx_4(2c+qx_4))+10qx_3(bq-c^2)\right)-a(6a+qx_3)(c+qx_4)}{4a^2}\,, \\ &\mathcal{W}_{1214} = -\tfrac{2x_2(6a+qx_3)(c+qx_4)+qx_3(2a+qx_3)}{4a}\,, \\ &\mathcal{W}_{1223} = \tfrac{a(7bq-6c^2+qx_4(2c+qx_4))+10qx_3(bq-c^2)}{4a^2}\,, \\ &\mathcal{W}_{1224} = -\tfrac{(6a+qx_3)(c+qx_4)}{4a}\,, \qquad \mathcal{W}_{1234} = -\tfrac{q(2a+qx_3)}{4a}\,, \\ &\mathcal{W}_{1313} = \tfrac{q\left(-a^2+2ax_2(c+qx_4)+20x_2^2(c^2-bq)\right)}{2a^2}\,, \\ &\mathcal{W}_{1314} = \tfrac{qx_2(-2a+2x_2(c+qx_4)+qx_3)}{2a}\,, \\ &\mathcal{W}_{1323} = \tfrac{q\left(a(c+qx_4)+20x_2(c^2-bq)\right)}{4a^2}\,, \quad \mathcal{W}_{1324} = \tfrac{q(x_2(c+qx_4)-a)}{2a}\,, \\ &\mathcal{W}_{1334} = \tfrac{q^2x_2}{2a}, \qquad \mathcal{W}_{1423} = \tfrac{q(2x_2(c+qx_4)+qx_3)}{4a}, \quad \mathcal{W}_{1424} = -qx_2\,, \\ &\mathcal{W}_{1414} = -2qx_2^2\,, \qquad \mathcal{W}_{2334} = \tfrac{q^2}{4a}\,, \qquad \mathcal{W}_{2424} = -\tfrac{q}{2}\,, \\ &\mathcal{W}_{2323} = \tfrac{5q(c^2-bq)}{2a^2}\,, \quad \mathcal{W}_{2324} = \tfrac{q(c+qx_4)}{4a}\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Por lo tanto el tensor de Bach está dado por

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{240q(c^2-bq)x_2^2}{a^4} & \frac{120q(c^2-bq)x_2}{a^4} & 0 & 0 \\ \frac{120q(c^2-bq)x_2}{a^4} & \frac{60q(c^2-bq)}{a^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

En consecuencia, *una métrica de tipo* (B1) *es Bach llana si y sólo si* $q = 0$ *ó* $c^2 - bq = 0$*, en este último caso siendo Einstein.* Más aún, tenemos los siguientes casos:

1. Si $q = 0$, entonces el operador de Ricci (3.27) es cero o bien es nilpotente en 2 pasos y la Equación (3.29) da $\mathcal{W}_{1224} = -\frac{3c}{2}$, por lo tanto distinguimos los dos siguientes casos:

   a) Si $q = 0$ y $c = 0$ entonces (M, g) es Ricci llana y la única componente no nula del tensor de Weyl es $\mathcal{W}_{1212} = -3b$. Por lo tanto (M, g) es llana si $q = c = b = 0$. En otro caso si $q = c = 0 \neq b$, los operadores de Jacobi son nilpotentes en 2 pasos. Por lo tanto (M, g) es Osserman y en consecuencia semi-conformemente llana.

   b) Si $q = 0$ y $c \neq 0$, entonces (M, g) no es localmente conformemente llana. Más aún los operadores de Jacobi conformes son nilpotentes y (M, g) es semi-conformemente llana.

2. Si $q \neq 0$ y $b = \frac{c^2}{q}$ entonces (3.29) muestra que $\mathcal{W}_{1334} = \frac{q^2 x_2}{2a}$ y por lo tanto (M, g) no es localmente conformemente llana. La Ecuación (3.27) muestra que (M, g) es Einstein. Además el operador de Jacobi $\mathcal{J}(x)(\cdot) = \mathcal{R}(\cdot, x)x$ asociado a cada vector unitario x tiene valores propios constantes $\{0, \epsilon_x \frac{q}{a^2}, \epsilon_x \frac{q}{4a^2}, \epsilon_x \frac{q}{4a^2}\}$.

Por lo tanto, centraremos nuestro estudio en el caso $q = 0$ y $c \neq 0$.

3.3.2. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (B2)

Sea $\mathfrak{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 \neq \pm 2\}$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y tensor métrico

$$\begin{aligned} g = &\left(a - \tfrac{a x_4^2}{2} + 4b x_2^2\right) dx_1^2 + 4b x_2 dx_1 dx_2 - a x_2 (x_4^2 - 4) dx_1 dx_3 \\ &- a(1 + 2x_2 x_3) x_4 dx_1 dx_4 + b dx_2^2 - \tfrac{1}{2} a (x_4^2 - 4) dx_2 dx_3 \\ &- a x_3 x_4 dx_2 dx_4 - \tfrac{1}{2} a dx_4^2 , \end{aligned} \tag{3.31}$$

dependiente de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. De la expresión anterior tenemos que $\det(g) = \frac{1}{32} a^4 (x_4^2 - 4)^2$ y la componente $g_{33} = 0$, la métrica (3.31) es de signatura neutra y la restricción $a \neq 0$, $x_4 \neq \pm 2$ en el Teorema 2.7 (B2) nos asegura que g es no degenerada. El operador de Ricci está dado por

$$\mathrm{Ric} = -\frac{3}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{40 b x_2}{3a(x_4^2-4)} & -\frac{20b}{3a(x_4^2-4)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

lo cual muestra que (M, g) es Einstein si y sólo si $b = 0$. Las componentes no nulas del tensor de Cotton están dadas por:

$$\mathfrak{C}_{121} = \frac{30 b x_2}{a}, \quad \mathfrak{C}_{122} = \frac{15b}{a}, \tag{3.33}$$

y las componentes no nulas del tensor de Weyl están determinadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{1212} &= -\tfrac{3}{4}b\left(x_4^2+2\right), & \mathcal{W}_{1214} &= \tfrac{3}{2}bx_2x_4\,, & \mathcal{W}_{1224} &= \tfrac{3bx_4}{4}\,, \\ \mathcal{W}_{1414} &= -3bx_2^2\,, & \mathcal{W}_{1424} &= -\tfrac{3bx_2}{2}\,, & \mathcal{W}_{2424} &= -\tfrac{3b}{4}\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Por lo tanto, el tensor de Bach está dado por

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -\frac{120bx_2^2}{a^2} & -\frac{60bx_2}{a^2} & 0 & 0 \\ -\frac{60bx_2}{a^2} & -\frac{30b}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

De la expresión anterior se sigue que *una métrica* (3.31) *es Bach llana si y sólo si $b = 0$, en cuyo caso es Einstein y localmente conformemente llana y por lo tanto de curvatura seccional constante $K = -\frac{1}{a}$.*

3.3.3. Espacios homogéneos no reductivos de Tipo (B3)

Sea $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) y tensor métrico

$$\begin{aligned} g = &-2ae^{-x_2}x_3dx_1dx_2 + 2ae^{-x_2}dx_1dx_3 + 2(2bx_3^2 - ax_4)dx_2^2 \\ &- 4bx_3dx_2dx_3 + 2adx_2dx_4 + bdx_3^2\,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

dependiente de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Como el determinante $\det(g) = a^4e^{-2x_2}$ y la componente $g_{44} = 0$, la métrica (3.36) es de signatura neutra y la restricción $a \neq 0$ en el Teorema 2.7 (B3) nos asegura que g es no degenerada. Un cálculo sencillo muestra que *el operador de Ricci para toda métrica de tipo* (B3) *es identicamente nulo y por lo tanto todas son Ricci llanas.* En consecuencia los tensores de Cotton y de Bach son también nulos. Sin embargo el tensor de Weyl no es necesariamente nulo. La única componente no nula del tensor de Weyl está dada por:

$$W_{2323} = -3b\,, \tag{3.37}$$

lo cual muestra que (M, g) es llana si y sólo si $b = 0$.

Toda métrica homogénea no reductiva de tipo (B3) *con $b \neq 0$ tiene operadores de Jacobi nilpotentes en 2 pasos, en consecuencia esta métrica es Osserman.*

3.4. Conclusiones geométricas

Como consecuencia de las expresiones que obtuvimos de los tensores de Ricci y de Weyl, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Un espacio (M, g) homogéneo no reductivo de dimensión 4 es de curvatura seccional constante K si y sólo si corresponde a uno de los siguientes casos:*

(i) *Tipo* (A2) *con $b = 0$, en cuyo caso $K = -\frac{\alpha^2}{q}$.*

(ii) *Tipo* (A3) *con $b = -\epsilon q$, en cuyo caso $K = \epsilon\frac{1}{q}$.*

(iii) *Tipo* (A4) *con $b = 0$, en cuyo caso $K = -\frac{1}{a}$.*

(iv) *Tipo* (A5), *en cuyo caso $K = -\frac{4}{a}$.*

(v) *Tipo* (B1) *con $q = c = b = 0$, en cuyo caso es llana.*

(vi) *Tipo* (B2) *con* $b = 0$, *en cuyo caso* $K = -\frac{1}{a}$.

(vii) *Tipo* (B3) *con* $b = 0$, *en cuyo caso es llana.*

Por otra parte, un largo pero sencillo cálculo muestra que:

Teorema 3.2. *Un espacio homogéneo no reductivo de dimensión 4, con curvatura seccional no constante, es localmente simétrico si y sólo si corresponde a uno de los siguientes casos:*

(i) *Tipo* (A1) *con* $b = 0$.

(ii) *Tipo* (B1) *con* $q = c = 0 \neq b$.

(iii) *Tipo* (B1) *con* $q \neq 0$ *y* $b = \frac{c^2}{q}$.

(iv) *Tipo* (B3) *con* $b \neq 0$.

Observación 3.3. Las variedades correspondientes al caso (i) son localmente conformemente llanas con operador de Ricci diagonalizable y localmente isométricas al producto $\mathbb{R} \times N$, donde N es de curvatura seccional constante $K_N = -\frac{1}{a}$. Las variedades correspondientes a los casos (ii) y (iv) son Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes en 2 pasos y, por lo tanto, localmente isométricas a las variedades de Walker dadas en [23]. Observemos también que en oposición a los casos Riemannianos y Lorentzianos, las variedades Osserman con métricas de signatura neutra pueden tener operadores de Jacobi no diagonalizables [8, 22]. Finalmente, las variedades en el caso (iii) corresponden a variedades para-Kähler de curvatura seccional para-holomorfa constante.

Capítulo 4

Espacios homogéneos no reductivos conforme Einsten

En este capítulo probamos el resultado principal de nuestro trabajo, determinando qué variedades homogéneas no reductivas de dimensión 4 contienen una métrica Einstein en su clase conforme.

Teorema 4.1. *Sea (M, g) un espacio homogéneo no reductivo de dimensión 4. (M, g) está en la clase conforme de una variedad Einstein si y sólo si (M, g) es Einstein, es localmente conformemente llana o es localmente isométrica a uno de los siguientes casos:*

(i) *Tipo* (A1) *con $q = 0$ y $b \neq 0$ ó $q = -\frac{3a}{q}$ y $b \neq 0$.*

(ii) *Tipo* (A2) *con $\alpha = 1$ y $b \neq 0$.*

(iii) *Tipo* (A3) *con $\epsilon \pm 1$ y $b \neq \mp q$.*

Todos los casos (i)-(iii) *están en la clase conforme de una métrica Ricci llana, la cual es única solo en el Tipo* (A1) *con $q = 0$. En los otros casos, el espacio de métricas conforme Ricci llanas es de dimensión 2 o bien de dimensión 3.*

Observación 4.2. Notemos que las métricas conforme Einstein en el Teorema 4.1 (i) son siempre de signatura neutra, mientras que las métricas correspondientes en los casos 4.1 (ii) y (iii) pueden ser Lorentzianas o de signatura neutra $(2, 2)$, dependiendo de la elección de los parámetros que definen las métricas (3.6), (3.11) y (3.15).

En nuestro análisis excluímos los casos triviales de variedades Einstein y variedades localmente conformemente llanas. Por lo tanto, obtenemos la forma explícita de la métrica conforme Einstein. Como toda variedad conforme Einstein es necesariamente Bach llana, el Teorema 2.10 muestra que el análisis de la ecuación conforme Einstein:

$$2 \operatorname{Hes}_\varphi + \varphi \, \rho = \frac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi \, \tau\} g \tag{4.1}$$

debe hacerse únicamente para los siguientes casos:

1. Tipo (A1) con $q = 0$ y $b \neq 0$ ó $q = -\frac{3a}{4}$ y $b \neq 0$.

2. Tipo (A2) con $\alpha = 1$ y $b \neq 0$.

3. Tipo (A3) con $\epsilon = \pm 1$ y $b \neq \mp q$.

4. Tipo (B1) con $q = 0 \neq c$.

Es importante enfatizar que a pesar de que toda métrica localmente conforme Einstein es Bach llana, existen ejemplos de variedades estrictamente Bach llanas, es decir, variedades que no son ni semi-conformemente llanas, ni localmente conforme Einstein (ver [1, 33]). De hecho, se tiene la siguiente condición necesaria para toda solución de la Ecuación (4.1), (ver [26]).

Proposición 4.3. [29] *Sea (M, g) una variedad pseudo-riemanniana de dimensión 4 tal que $\overline{g} = e^{2\sigma} g$ es Einstein. Entonces:*

1. $\mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot, \nabla\sigma) = 0$,
2. $\mathfrak{B} = 0$,

donde $\mathfrak{C}$, $\mathcal{W}$ y $\mathfrak{B}$ son los tensores de Cotton, Weyl y Bach respectivamente.

Las soluciones de φ de la ecuación conforme Einstein (4.1) y las funciones σ en la proposición anterior están relacionadas por $\sigma = -2\log(\varphi)$. Denotaremos por $\mathcal{C}$ al campo de tensores de tipo $(0, 3)$ dado por:

$$\mathcal{C} = \mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot, \nabla\sigma).$$

Observemos que $\mathcal{C}_{ijk} = -\mathcal{C}_{jik} \quad \forall i, j, k \in \{1, \ldots, 4\}$.

Las dos condiciones de la Proposición 4.3 son suficientes para ser conforme Einstein si (M, g) es *weakly-generic*. Nótese que los casos (i)-(iii) en el Teorema 2.10 no son *weakly-generic* y por ello debe estudiarse caso por caso la existencia de soluciones de la Ecuación (4.1). El caso contrario ocurre con las métricas del Teorema 2.10 (iv), pues es *weakly generic*.

4.1. Variedades homogéneas no reductivas de Tipo (A1)

En este tipo de métrica existen dos posibilidades para las que el tensor de Bach es cero: $q = 0$ y $b \neq 0$ ó $q = -\frac{3a}{q}$ y $b \neq 0$. Por lo tanto, consideraremos las dos posibilidades por separado.

4.1.1. Tipo (A1) con $q = 0$ y $b \neq 0$

Recordemos que la métrica en este caso toma la forma:

$$\begin{aligned} g = {} & (4bx_2^2 + a)\, dx_1^2 + 4bx_2\, dx_1 dx_2 - (4ax_2x_4 - 4cx_2 + a)\, dx_1 dx_3 \\ & + 4ax_2\, dx_1 dx_4 + b\, dx_2^2 - 2(ax_4 - c)\, dx_2 dx_3 + 2a\, dx_2 dx_4 + q\, dx_3^2 \,. \end{aligned}$$

En este caso, por la Ecuación (3.3) las componentes no nulas del tensor de Cotton están dadas por:

$$\mathfrak{C}_{121} = -\frac{24\, bx_2}{a}\,, \qquad \mathfrak{C}_{122} = -\frac{12\, b}{a}\,, \tag{4.2}$$

y por la Ecuación (3.4) la única componente no nula del tensor de Weyl es:

$$\mathcal{W}_{1212} = -6b\,, \tag{4.3}$$

lo que muestra que (M, g) no es *weakly-generic*.

Para una función positiva arbitraria $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$, sea $\sigma = -2\log(\varphi)$, entonces un sencillo cálculo muestra que el gradiente de σ está dado por:

$$\begin{aligned}\nabla\sigma = & \tfrac{4}{a^2\varphi}\left\{(ax_4 - c)\,\varphi_4 + a\varphi_3\right\}\partial_1 \\ & - \tfrac{2}{a^2\varphi}\left\{\varphi_4\left(a + 4x_2\left(ax_4 - c\right)\right) + 4ax_2\varphi_3\right\}\partial_2 \\ & + \tfrac{4}{a^2\varphi}\left\{a\left(2\varphi_3 - 2x_2\varphi_2 + \varphi_1\right) + 2\varphi_4\left(ax_4 - c\right)\right\}\partial_3 \\ & + \tfrac{2}{a^3\varphi}\left\{\varphi_4\left(ab + 4ax_4\left(ax_4 - 2c\right) + 4c^2\right) + 2a\varphi_1\left(ax_4 - c\right)\right. \\ & \qquad \left. + \, a\left(4\varphi_3\left(ax_4 - c\right) + \varphi_2\left(4x_2\left(c - ax_4\right) - a\right)\right)\right\}\partial_4\,,\end{aligned}$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ representan los campos coordenados y $\varphi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ denota la derivada parcial correspondiente. Por lo tanto, las únicas componentes no nulas del tensor $\mathcal{C} = \mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot,\cdot,\cdot,\nabla\sigma)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} a^2\varphi\mathcal{C}_{121} &= -12b\left(\varphi_4\left(a - 4x_2\left(c - ax_4\right)\right) + 4ax_2\varphi_3 + 2ax_2\varphi\right)\,, \\ a^2\varphi\mathcal{C}_{122} &= -12b\left(-2\varphi_4\left(c - ax_4\right) + 2a\varphi_3 + a\varphi\right)\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como $\mathcal{C} = 0$ es una condición necesaria para que (M, g) sea conforme Einstein entonces $a\varphi(\mathcal{C}_{121} - 2x_2\mathcal{C}_{122}) = -12b\varphi_4$ debería ser cero y como $b \neq 0$, en este caso φ no depende de la coordenada x_4. Entonces

$$\mathcal{C}_{122} = \frac{-12b(\varphi + 2\varphi_3)}{a\varphi}\,, \quad \mathcal{C}_{121} = 2x_2\mathcal{C}_{122}\,.$$

En consecuencia, $\mathcal{C} = 0$ muestra que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{-\frac{x_3}{2}}\phi(x_1, x_2)\,, \tag{4.5}$$

para alguna función diferenciable $\phi(x_1, x_2)$.

A continuación, analizaremos la existencia de soluciones de (4.1) para alguna φ que cumpla la condición anterior. Para simplificar la notación, sea

$$\mathcal{E} = 2\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\,\rho - \frac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\,\tau\}g\,,$$

y determinemos las condiciones para que $\mathcal{E} = 0$.

Como $\mathcal{E}(\partial_1, \partial_1) = 2e^{-\frac{x_3}{2}}\phi_{11}(x_1, x_2)$, toda solución de (4.1) debe ser de la forma (4.5) con $\phi(x_1, x_2) = \alpha_1(x_2) + x_1\alpha_2(x_2)$ para algunas funciones diferenciables $\alpha_1, \alpha_2 \in M$. Un cálculo de $\mathcal{E}(\partial_1, \partial_2) = -2e^{-\frac{x_3}{2}}(\alpha_1'(x_2) + (x_1 - 1)\alpha_2'(x_2))$ muestra que $\alpha_1(x_2) = \kappa_1$ y $\alpha_2(x_2) = \kappa_2$ para algunas constantes κ_1, κ_2. Por lo tanto, la componente $\mathcal{E}(\partial_2, \partial_4) = -2\kappa_2 e^{-\frac{x_3}{2}}$ muestra que $\kappa_2 = 0$ y entonces la Ecuación (4.5) se reduce a

$$\varphi = \kappa_1 e^{-\frac{x_3}{2}}\,.$$

Unos sencillos cálculos muestran que $\mathcal{E} = 0$ se cumple y la métrica conforme $\bar{g} = \varphi^{-2}g$ es Ricci llana.

Observación 4.4. Existe una familia 1-paramétrica de métricas conforme Ricci llanas.

Observación 4.5. Como toda variedad homogénea no reductiva de tipo (A1) con $q = 0$ y $b \neq 0$ es conforme Osserman con operadores de Jacobi conformes nilpotentes en 2 pasos y esta propiedad es invariante conforme, entonces la métrica $\bar{g}$ es Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes en 2 pasos.

4.1.2. Tipo (A1) con $q = -\frac{3a}{q}$ y $b \neq 0$

Recordemos que la métrica en este caso toma la forma:

$$
\begin{aligned}
g = {} & (4bx_2^2 + a)\, dx_1^2 + 4bx_2\, dx_1dx_2 - (4ax_2x_4 - 4cx_2 + a)\, dx_1dx_3 \\
& + 4ax_2\, dx_1dx_4 + b\, dx_2^2 - 2(ax_4 - c)\, dx_2dx_3 + 2a\, dx_2dx_4 + q\, dx_3^2\,,
\end{aligned}
$$

procedemos de la misma manera que en el caso anterior. Para una función positiva arbitraria $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ en M, consideremos $\sigma = -2\log(\varphi)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\nabla\sigma = {} & \tfrac{1}{a^2\varphi}\left\{a\left(\varphi_3 + 3x_2\varphi_2 - \tfrac{3}{2}\varphi_1\right) + \varphi_4\,(ax_4 - c)\right\}\partial_1 \\
& - \tfrac{1}{a^2\varphi}\left\{2\varphi_4\,(x_2\,(ax_4 - c) + a) + ax_2\,(2\varphi_3 + 6x_2\varphi_2 - 3\varphi_1)\right\}\partial_2 \\
& + \tfrac{1}{a^2\varphi}\left\{a\,(2\varphi_3 - 2x_2\varphi_2 + \varphi_1) + 2\varphi_4\,(ax_4 - c)\right\}\partial_3 \\
& + \tfrac{1}{a^3\varphi}\left\{2\varphi_4\left(a^2x_4^2 + ab - 2acx_4 + c^2\right)\right. \\
& \qquad \left. + a\,(\varphi_1\,(ax_4 - c) - 2\,(\varphi_2\,(x_2\,(ax_4 - c) + a) + \varphi_3\,(c - ax_4)))\right\}\partial_4\,.
\end{aligned}
$$

Recordemos que de la Ecuación (3.3) las únicas componentes no nulas del tensor de Cotton están dadas por:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{C}_{121} = \tfrac{12bx_2}{a}\,, \qquad \mathfrak{C}_{122} = \tfrac{6b}{a}\,, \qquad \mathfrak{C}_{131} = -\tfrac{12bx_2^2}{a}\,, \\
&\mathfrak{C}_{232} = -\tfrac{3b}{a}\,, \qquad \mathfrak{C}_{132} = \mathfrak{C}_{231} = 2x_2\,\mathfrak{C}_{232}\,.
\end{aligned}
$$

La Ecuación (3.4) muestra que las componentes no nulas del tensor de Weyl son:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{W}_{1212} = -3b\,, \qquad \mathcal{W}_{1213} = 3bx_2\,, \qquad \mathcal{W}_{1223} = \tfrac{3b}{2}\,, \\
&\mathcal{W}_{1313} = -3bx_2^2, \quad \mathcal{W}_{1323} = -\tfrac{3bx_2}{2}, \quad \mathcal{W}_{2323} = -\tfrac{3b}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces las componentes no nulas del tensor $\mathcal{C}$ están dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{131} &= -x_2\mathcal{C}_{121}, \quad \mathcal{C}_{231} = -\tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{121}\,, \\
\mathcal{C}_{132} &= -x_2\mathcal{C}_{122}, \quad \mathcal{C}_{232} = -\tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{122}\,, \\
\mathcal{C}_{133} &= -x_2\mathcal{C}_{123}, \quad \mathcal{C}_{233} = -\tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{123}\,,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
a^2\varphi\,\mathcal{C}_{121} &= 6b\left(x_2\,(2a\varphi + a\varphi_1 - 2a\varphi_3 - 2a\varphi_4x_4 + 2c\varphi_4) - a\varphi_4 - 2a\varphi_2x_2^2\right), \\
a^2\varphi\,\mathcal{C}_{122} &= 3b\,(2a\varphi + a\varphi_1 - 2a\varphi_3 - 2a\varphi_2x_2 - 2a\varphi_4x_4 + 2c\varphi_4)\,, \\
a^2\varphi\,\mathcal{C}_{123} &= -3ab\varphi_4\,.
\end{aligned}
$$

Como $a, b \neq 0$ y $\mathcal{C}_{123} = 0$, la función $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ no depende de la coordenada x_4 y la componente $\mathcal{C}_{121}$ se reduce a

$$
\mathcal{C}_{122} = \frac{3b}{a\varphi}\left\{2\varphi + \varphi_1 - 2\varphi_3 - 2\varphi_2x_2\right\}\,, \quad \mathcal{C}_{121} = 2x_2\mathcal{C}_{122}\,.
$$

Una solución de la ecuación diferencial $2\varphi = 2\varphi_3 + 2x_2\varphi_2 - \varphi_1$ es necesariamente de la forma

$$
\varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{-2x_1}\phi(e^{2x_1}x_2, 2x_1 + x_3) = e^{-2x_1}(\phi\circ\psi)(x_1, x_2, x_3)\,, \tag{4.6}
$$

donde $\psi(x_1, x_2, x_3) = (e^{2x_1}x_2, 2x_1 + x_3)$ y $\phi(z, \omega)$ es una función arbitraria para $z = e^{2x_1}x_2$ y $\omega = 2x_1 + x_3$.

A continuación, analizaremos la existencia de soluciones de (4.1) para alguna φ como en (4.6). Haciendo $\mathcal{E} = 2\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\,\rho - \frac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\,\tau\}g$, tenemos que $\mathcal{E}(\partial_2, \partial_2) = 2e^{2x_1}\partial^2_{z^2}\phi = 0$ y por lo tanto

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{-2x_1}\left(e^{2x_1}x_2\hat{\phi}(2x_1 + x_3) + \bar{\phi}(2x_1 + x_3)\right)$$

para algunas funciones diferenciables $\hat{\phi}(\omega)$, $\bar{\phi}(\omega)$. Considerando la componente $\mathcal{E}(\partial_2, \partial_3) = 2\hat{\phi}' - \hat{\phi} = 0$, tenemos que $\hat{\phi}(2x_1 + x_3) = \kappa e^{\frac{1}{2}(2x_1+x_3)}$ para alguna constante κ. Luego, las únicas componentes no nulas del campo de tensores $\mathcal{E}$ están dadas por:

$$\mathcal{E}(\partial_1, \partial_1) = 2\mathcal{E}(\partial_1, \partial_3) = 2\mathcal{E}(\partial_3, \partial_3) = 4e^{-2x_1}\left(\bar{\phi} - 3\bar{\phi}' + 2\bar{\phi}''\right).$$

Por lo tanto, $\mathcal{E} = 0$ nos dice que $\bar{\phi}(2x_1 + x_3) = \kappa_1 e^{\frac{1}{2}(2x_1+x_3)} + \kappa_2 e^{2x_1+x_3}$ y en consecuencia toda solución de la ecuación conforme Einstein es de la forma

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \kappa_1 e^{x_3} + \kappa_2 e^{\frac{1}{2}x_3 - x_1} + \kappa_3\, x_2\, e^{\frac{1}{2}x_3 + x_1}.$$

Por lo tanto, toda métrica conforme $\bar{g} = \varphi^{-2}g$ es Ricci llana.

Observación 4.6. Existe una familia 3-paramétrica de métricas conformes, todas ellas Ricci llanas.

Observación 4.7. Como toda variedad homogénea no reductiva de tipo (A1) con $q = -\frac{3a}{4}$ y $b \neq 0$ es conforme Osserman con operadores de Jacobi conforme nilpotentes en 2 pasos, entonces toda métrica conforme Einstein $\bar{g}$ es Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes en 2 pasos. Lo que muestra que los casos $q = 0$ y $q = -\frac{3a}{4}$ son esencialmente distintos pues el espacio de métricas conforme Einstein es de dimensión 1 en el primer caso y es de dimensión 3 en el segundo caso.

4.2. Variedades homogéneas no reductivas de Tipo (A2)

Recordemos que la métrica tiene la forma:

$$g = -2ae^{2\alpha x_4}\, dx_1 dx_3 + ae^{2\alpha x_4}dx_2^2 + be^{2(\alpha-1)x_4}dx_3^2 + 2ce^{(\alpha-1)x_4}dx_3 dx_4 + qdx_4^2,$$

considerando $\alpha = 1$ y $b \neq 0$. Sea $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función positiva en M y $\sigma = -2\log(\varphi)$. Entonces

$$\begin{aligned}\nabla\sigma = {}& \tfrac{2}{a^2 q\varphi}\left\{ae^{-2x_4}\left(q\varphi_3 - c\varphi_4\right) - e^{-4x_4}\varphi_1\left(c^2 - bq\right)\right\}\partial_1 \\ & - \tfrac{2}{a\varphi}\varphi_2 e^{-2x_4}\,\partial_2 + \tfrac{2}{a\varphi}\varphi_1 e^{-2x_4}\,\partial_3 - \tfrac{1}{aq\varphi}\left\{2a\varphi_4 + 2c\varphi_1 e^{-2x_4}\right\}\partial_4 .\end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.8) y (3.9) se sigue que las componentes no nulas de los tensores de Cotton y de Weyl están dados por:

$$\mathfrak{C}_{343} = \frac{b}{q}, \quad \mathcal{W}_{2323} = \frac{ab}{2q}e^{2x_4}, \quad \mathcal{W}_{3434} = -\frac{b}{2},$$

respectivamente, entonces (M, g) no es *weakly-generic*. Por lo tanto, las únicas componentes no nulas del tensor $\mathcal{C} = \mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot, \cdot, \cdot, \nabla\sigma)$ están dadas por:

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_{232} = -\tfrac{b}{q}\tfrac{\varphi_1}{\varphi}, \qquad \mathcal{C}_{233} = -\tfrac{b}{q}\tfrac{\varphi_2}{\varphi}, \qquad \mathcal{C}_{344} = -\tfrac{b}{a}\tfrac{\varphi_1}{\varphi}e^{-2x_4}, \\ &\mathcal{C}_{343} = \tfrac{b}{a\,q\,\varphi}\left(a\left(\varphi - \varphi_4\right) - c\varphi_1 e^{-2x_4}\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $ab \neq 0$ las primeras dos ecuaciones en (4.7) muestran que $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ no depende de las coordenadas x_1 y x_2. Por lo tanto, el tensor $\mathcal{C}$ se reduce a

$$\mathcal{C}_{343} = \frac{b\,(\varphi - \varphi_4)}{q\varphi}\,,$$

donde φ es una función diferenciable en las coordenadas (x_3, x_4) y se sigue de $\mathcal{C}_{343} = 0$ que $\varphi(x_3, x_4) = \phi(x_3)e^{x_4}$ para alguna función diferenciable $\phi(x_3)$.

Considerando ahora la ecuación conforme Einstein (4.1) y haciendo $\mathcal{E} = 2\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\,\rho - \frac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\,\tau\}g$, la única componente no nula del tensor $\mathcal{E}$ es:

$$\mathcal{E}(\partial_3, \partial_3) = \frac{e^{x_4}\,(2q\phi'' - b\phi)}{q}\,,$$

integrando $\mathcal{E}(\partial_3, \partial_3) = 0$ obtenemos que:

$$\begin{cases} \varphi = e^{x_4 - x_3\sqrt{\frac{b}{2q}}}\left(\kappa_1 e^{x_3\sqrt{\frac{2b}{q}}} + \kappa_2\right), & \text{si} \quad b\,q > 0, \\ \varphi = e^{x_4}\left(\kappa_1 \cos\left(x_3\sqrt{-\frac{b}{2q}}\right) + \kappa_2 \sin\left(x_3\sqrt{-\frac{b}{2q}}\right)\right), & \text{si} \quad b\,q < 0\,. \end{cases} \tag{4.8}$$

Por lo tanto, un cálculo sencillo muestra que para toda función φ dada por (4.8), la métrica $\bar{g} = \varphi^{-2}g$ es Ricci llana.

Observación 4.8. La Ecuación (4.8) muestra que existe una familia 2-paramétrica de métricas conformes, todas ellas Ricci llanas.

Observación 4.9. Para toda métrica conforme Einstein, existen deformaciones conformes de la métrica que siguen siendo Einstein. De tal manera que, métricas que no son del tipo (A2) con $\alpha = 1$ y $b \neq 0$ son semi-conformemente llanas y por lo tanto no están en la clase conforme de una métrica Osserman.

4.3. Variedades homogéneas no reductivas de Tipo (A3)

Recordemos que en el tipo (A3), la métrica tiene los siguientes dos casos:

$$g_+ = 2ae^{2x_3}\,dx_1dx_4 + ae^{2x_3}\cos(x_4)^2dx_2^2 + bdx_3^2 + 2cdx_3dx_4 + q\,dx_4^2\,,$$

$$g_- = 2ae^{2x_3}\,dx_1dx_4 + ae^{2x_3}\cosh(x_4)^2dx_2^2 + bdx_3^2 + 2cdx_3dx_4 + q\,dx_4^2\,.$$

Sea $\epsilon = 1$ y $b \neq -q$ los correspondientes al caso g_+ y $\epsilon = -1$ y $b \neq q$ los correspondientes al caso g_-. Probaremos únicamente el caso correspondiente a $\epsilon = 1$ pues el caso $\epsilon = -1$ es completamente análogo. Asumiremos entonces que $b \neq -q$. Como en los casos anteriores, sea $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función positiva y sea $\sigma = -2\log(\varphi)$. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla\sigma = {}& \tfrac{1}{a^2\,b\varphi}\left\{2e^{-4x_3}\left(ae^{2x_3}\left(c\varphi_3 - b\varphi_4\right) + \varphi_1\left(bq - c^2\right)\right)\right\}\partial_1 \\ & - \tfrac{2\varphi_2}{a\varphi}\left\{e^{-2x_3}\sec\left(x_4\right)^2\right\}\partial_2 + \tfrac{2}{a\,b\varphi}\left\{c\varphi_1 e^{-2x_3} - a\varphi_3\right\}\partial_3 - \tfrac{2}{a\varphi}\varphi_1 e^{-2x_3}\partial_4\,. \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.13) y (3.14) se sigue que las componentes no nulas del tensor $\mathcal{C} = \mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot,\cdot,\cdot,\nabla\sigma)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} & b\,\varphi\,\mathcal{C}_{242} = (b+q)\cos\left(x_4\right)^2\varphi_1\,, \quad b\,\varphi\,\mathcal{C}_{244} = -(b+q)\varphi_2\,, \\ & a\varphi\,\mathcal{C}_{343} = -(b+q)e^{-2x_3}\varphi_1\,, \\ & a\,b\,\varphi\,\mathcal{C}_{344} = -(b+q)e^{-2x_3}\left(a\left(\varphi - \varphi_3\right)e^{2x_3} + c\varphi_1\right)\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como $a \neq 0$ y $b \neq -q$, las primeras dos ecuaciones en (4.9) muestran que φ no depende de las coordenadas x_1 y x_2, por lo que el tensor $\mathcal{C}$ se reduce a

$$b\,\varphi\,\mathcal{C}_{344} = -(b+q)\,(\varphi - \varphi_3)\ ,$$

donde φ es una función diferenciable en las coordenadas (x_3, x_4). Ahora $\mathcal{C}_{344} = 0$ nos dice que $\varphi(x_3, x_4) = \phi(x_4)e^{x_3}$, para alguna función diferenciable $\phi(x_4)$.

Considerando ahora la ecuación conforme Einstein y como en los casos anteriores haciendo $\mathcal{E} = 2\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\,\rho - \frac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\,\tau\}g$. Un cálculo sencillo muestra que la única componente no nula del tensor $\mathcal{E}$ está dada por:

$$\mathcal{E}(\partial_4, \partial_4) = \frac{1}{b}e^{x_3}\left((b-q)\phi + 2b\phi''\right)\ ,$$

lo que muestra que $\phi(x_4)$ está determinada por la ecuación $\phi'' = -\frac{b-q}{2b}\phi$. Por lo tanto la deformación conforme $\varphi(x_3, x_4)$ está dada por:

$$\begin{cases} \varphi_+ = (\kappa_1 x_4 + \kappa_2)e^{x_3}, & \text{si } b-q=0,\\ \varphi_+ = e^{x_3 - x_4\sqrt{\frac{q-b}{2b}}}\left(\kappa_1 e^{x_4\sqrt{\frac{2(q-b)}{b}}} + \kappa_2\right), & \text{si } b(q-b)>0,\\ \varphi_+ = e^{x_3}\left(\kappa_1\cos\left(x_4\sqrt{\frac{b-q}{2b}}\right) + \kappa_2\sin\left(x_4\sqrt{\frac{b-q}{2b}}\right)\right), & \text{si } b(q-b)<0\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

Por lo tanto, en todos los casos anteriores la métrica conforme $\bar{g}_+ = \varphi_+^{-2}g_+$ es Ricci llana.

El caso $\epsilon = -1$ se obtiene de una manera completamente análoga. Para toda métrica g dada por (3.15), la métrica conforme $\bar{g}_- = \varphi_-^{-2}g_-$ es Ricci llana, donde

$$\begin{cases} \varphi_- = (\kappa_1 x_4 + \kappa_2)e^{x_3}, & \text{si } b+q=0,\\ \varphi_- = e^{x_3 - x_4\sqrt{\frac{q+b}{2b}}}\left(\kappa_1 e^{x_4\sqrt{\frac{2(q+b)}{b}}} + \kappa_2\right), & \text{si } b(q+b)>0,\\ \varphi_- = e^{x_3}\left(\kappa_1\cos\left(x_4\sqrt{-\frac{b+q}{2b}}\right) + \kappa_2\sin\left(x_4\sqrt{-\frac{b+q}{2b}}\right)\right), & \text{si } b(q+b)<0\,. \end{cases} \tag{4.11}$$

Observación 4.10. Para cada una de las posibilidades en (4.10) y (4.11), existe una familia 2-paramétrica de métricas conformes, todas ellas Ricci llanas.

Observación 4.11. Para toda métrica conforme Einstein, existen deformaciones de la métrica la cual es Einstein. Por lo tanto, observemos que una métrica que no es de tipo (A3) con $\epsilon = \pm 1$ y $b \neq \mp q$ es semi-conformemente llana y por lo tanto (M, g) no pertenece a la clase conforme de una métrica Osserman.

4.4. Variedades homogéneas no reductivas de Tipo (B1)

Recordemos que la métrica tiene la forma

$$\begin{aligned} g = &\left(q(x_3^2 + 4x_2x_3x_4 + 4x_2^2x_4^2) + 4cx_2x_3 + 8cx_2^2x_4 + 2ax_3 + 4bx_2^2\right)dx_1^2\\ &+ 2(q(x_3x_4 + 2x_2x_4^2) + 4cx_2x_4 + cx_3 + 2bx_2)dx_1dx_2\\ &+ 2(q(x_3 + 2x_2x_4) + 2cx_2 + a)dx_1dx_3 + 4ax_2dx_1dx_4\\ &+ (qx_4^2 + 2cx_4 + b)dx_2^2 + 2(qx_4 + c)dx_2dx_3 + 2adx_2dx_4 + qdx_3^2\,, \end{aligned}$$

y debemos considerar el caso $q = 0 \neq c$. Haciendo $q = 0$ en las ecuaciones (3.28) y (3.29), las componentes no nulas de los tensores de Cotton y de Weyl están dados por:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{C}_{121} = \frac{45c^2x_2}{a^2}\,, & \mathfrak{C}_{122} = \frac{45c^2}{2a^2}\,, & \\[1em]
\mathcal{W}_{1212} = \frac{3c^2x_3}{a} - 3\,(b+2cx_4)\,, & \mathcal{W}_{1213} = -\frac{3c(a+2cx_2)}{2a}\,, & \\
\mathcal{W}_{1214} = -3cx_2\,, & \mathcal{W}_{1223} = -\frac{3c^2}{2a}\,, & \mathcal{W}_{1224} = -\frac{3c}{2}\,,
\end{array}
$$

respectivamente. Lo que muestra que (M, g) en este caso es *weakly-generic* y por lo tanto $\mathcal{C} = \mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot,\cdot,\cdot,\nabla\sigma) = 0$ y es una condición necesaria y suficiente para ser conforme Einstein. Como en las secciones anteriores, consideremos $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función positiva y sea $\sigma = -2\log(\varphi)$. Expresamos el gradiente de σ como

$$
\begin{aligned}
\nabla\sigma = {} & \tfrac{2}{a^2\,\varphi}\left\{c\varphi_4 - a\varphi_3\right\}\partial_1 + \tfrac{2}{a^2\,\varphi}\left\{2x_2\,(a\varphi_3 - c\varphi_4) - a\varphi_4\right\}\partial_2 \\
& + \tfrac{2}{a^2\,\varphi}\left\{x_3\,(2a\varphi_3 - c\varphi_4) - a\varphi_1 + 2a\varphi_2x_2\right\}\partial_3 \\
& + \tfrac{2}{a^2\,\varphi}\left\{b\varphi_4 - \varphi_2\,(a+2cx_2) + c\varphi_1 - c\varphi_3x_3 + 2c\varphi_4x_4\right\}\partial_4\,.
\end{aligned}
$$

Las componentes $\mathcal{C}_{123}$ y $\mathcal{C}_{124}$ del tensor $\mathcal{C} = \mathfrak{C} + \mathcal{W}(\cdot,\cdot,\cdot,\nabla\sigma)$ están dadas por:

$$
a\,\varphi\,\mathcal{C}_{123} = 3c\varphi_3, \quad a\,\varphi\,\mathcal{C}_{124} = 3c\varphi_4\,,
$$

y como $c \neq 0$ y $\mathcal{C}_{123} = \mathcal{C}_{124} = 0$, la función φ es independiente de las coordenadas x_3 y x_4. Asumiendo que φ es una función diferenciable en las coordenadas (x_1, x_2), las componentes no nulas de $\mathcal{C}$ se reducen a

$$
\mathcal{C}_{121} = -\frac{3c\,(a\varphi_1 - 15c\varphi x_2)}{a^2\varphi}\,, \quad \mathcal{C}_{122} = \frac{3c\,(15c\varphi - 2a\varphi_2)}{2a^2\varphi}\,. \tag{4.12}
$$

Un cálculo sencillo muestra que $\mathcal{C}_{122} = 0$ si y sólo si

$$
\varphi = \phi(x_1)e^{\frac{15c}{2a}x_2}\,, \tag{4.13}
$$

para alguna función diferenciable $\phi(x_1)$. Entonces $\mathcal{C}_{121}$ se transforma en

$$
\mathcal{C}_{121} = -\frac{3c\,(a\phi'(x_1) - 15cx_2\phi(x_1))}{a^2\phi(x_1)}\,, \tag{4.14}
$$

de donde se sigue que ϕ es identicamente nula y en consecuencia $\varphi \equiv 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto esta variedad no es conforme Einstein.

Observaciones finales y trabajo futuro

- La clasificación de las variedades pseudo-riemannianas conforme Einstein está prácticamente resuelta en dimensión 4 cuando la variedad M es el producto de dos superficies $M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Geométricamente esta situación se corresponde con la existencia de una distribución no degenerada de dimensión 2 paralela en la variedad. Pretendemos abordar este problema cuando la variedad M admite dos distribuciones paralelas de dimensión 1. El problema será especialmente relevante cuando una de las distribuciones sea degenerada, dando lugar a una estructura de Walker.

- Las variedades Kähler conforme Einstein Riemannianas se caracterizan por la anulación del tensor de Bach [19]. Pretendemos abordar este problema considerando métricas Kähler indefinidas y variedades para-Kähler.

Bibliografía

[1] E. Abbena, S. Garbiero, and S. Salamon. Bach-flat Lie groups in dimension 4. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **351** (2013), 303–306.

[2] D. Alekseevsky, N. Blažić, N. Bokan, and Z. Rakić. Self-duality and pointwise Osserman manifolds. *Archivum Mathematicum.* **035** 3 (1999), 193–201.

[3] R. Bach. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. *Math. Z.* **9** (1921), 110–135.

[4] J. Bergman. *Conformal Einstein spaces and Bach tensor generalizations in n dimensions.* PhD thesis, Linküping University, 2004.

[5] N. Blažić, N. Bokan, and P. Gilkey. A note on Osserman Lorentzian manifolds. *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 227–230.

[6] N. Blažić and P. Gilkey. Conformally Osserman manifolds and conformally complex space forms. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **1** (2004), 97–106.

[7] N. Blažić and P. Gilkey. Conformally Osserman manifolds and self-duality in Riemannian geometry. In *Differential geometry and its applications*, pages 15–18. Matfyzpress, Prague, 2005.

[8] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella, and R. Vázquez-Lorenzo. Nonsymmetric Osserman indefinite Kähler manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2763–2769.

[9] H. W. Brinkmann. Riemann spaces conformal to Einstein spaces. *Math. Ann.* **91** (1924), 269–278.

[10] H. W. Brinkmann. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Math. Ann.* **94** (1925), 119–145.

[11] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, and X. Valle-Regueiro. Half conformally flat gradient Ricci almost solitons. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* **472** (2016), 20160043.

[12] G. Calvaruso and A. Fino. Ricci solitons and geometry of four-dimensional nonreductive homogeneous spaces. *Canad. J. Math.* **64** (2012), 778–804.

[13] G. Calvaruso, A. Fino, and A. Zaeim. Homogeneous geodesics of non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian 4-manifolds. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **46** (2015), 23–64.

[14] G. Calvaruso and A. Zaeim. A complete classification of Ricci and Yamabe solitons of non-reductive homogeneous 4-spaces. *J. Geom. Phys.* **80** (2014), 15–25.

[15] G. Calvaruso and A. Zaeim. Geometric structures over non-reductive homogeneous 4-spaces. *Adv. Geom.* **14** (2014), 191–214.

[16] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey, and R. Vázquez-Lorenzo. The geometry of modified Riemannian extensions. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **465** (2009), 2023–2040.

[17] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, and R. Vázquez-Lorenzo. Conformal geometry of non-reductive four-dimensional homogeneous spaces. arXiv:1602.08266, 2016.

[18] Q. Chi. A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces. *J. Differential Geom.* **28** (1988), 187–202.

[19] A. Derdziński. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. *Compositio Math.* **49** (1983), 405–433.

[20] M. E. Fels and A. G. Renner. Non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian manifolds of dimension four. *Canad. J. Math.* **58** (2006), 282–311.

[21] E. García-Río, D. N. Kupeli, and R. Vázquez-Lorenzo. *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, volume 1777 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[22] E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal, and R. Vázquez-Lorenzo. Nonsymmetric Osserman pseudo-Riemannian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2771–2778.

[23] Eduardo García-Río and Ramón Vázquez-Lorenzo. Four-dimensional Osserman symmetric spaces. *Geom. Dedicata.* **88** (2001), 147–151.

[24] P. Gilkey, M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, and S. Nikčević. *The Geometry of Walker Manifolds.* Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. Morgan & Claypool Publishers, 2009.

[25] P. Gilkey, A. Swann, and L. Vanhecke. Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2).* **46** (1995), 299–320.

[26] A. R. Gover and P. Nurowski. Obstructions to conformally Einstein metrics in n dimensions. *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 450–484.

[27] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry Set.* Wiley Classics Library. Wiley, 2009.

[28] B. Komrakov, Jr. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces. *Lobachevskii J. Math.* **8** (2001), 33–165 (electronic).

[29] C. N. Kozameh, E. T. Newman, and K. P. Tod. Conformal Einstein spaces. *Gen. Relativity Gravitation.* **17** (1985), 343–352.

[30] W. Kühnel. *Differential geometry*, volume 16 of *Student Mathematical Library.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Curves—surfaces—manifolds, Translated from the 1999 German original by Bruce Hunt.

[31] W. Kühnel and H-B. Rademacher. Conformal transformations of pseudo-Riemannian manifolds. In *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., pages 261–298. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

[32] W. Kühnel and H-B. Rademacher. Conformally Einstein spaces revisited. In *Pure and applied differential geometry, PADGE 2012. In memory of Franki Dillen. Proceedings of the international conference, Leuven, Belgium, August 27–30, 2012*, pages 161–167. Aachen: Shaker, 2013.

[33] Th. Leistner and P. Nurowski. Ambient metrics for n-dimensional *pp*-waves. *Comm. Math. Phys.* **296** (2010), 881–898.

[34] M. Listing. Conformal Einstein spaces in N-dimensions. *Ann. Global Anal. Geom.* **20** (2001), 183–197.

[35] Y. Nikolayevsky. Conformally Osserman manifolds. *Pacific J. Math.* **245** (2010), 315–358.

[36] Z. Olszak. On the existence of generalized complex space forms. *Israel J. Math.*, **65** (1989), 214–218.

[37] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[38] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus. Invariants of real low dimension Lie algebras. *J. Mathematical Phys.* **17** (1976), 986–994.

[39] J. A. Schouten. *Der Ricci-Kalkül*, volume 10 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, Reprint of the 1924 original.

[40] P. Szekeres. Spaces conformal to a class of spaces in general relativity. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* **274** (1963), 206–212.

[41] X. Valle-Regueiro. *Variedades Quasi-Einstein Autoduais.* Master thesis, Universidade de Santiago de Compostela, 2015.

[42] A. G. Walker. Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes. *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2)* **1** (1950), 69–79.

[43] V. Wünsch. C-Räume und Huygenssches Prinzip. *Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. Erfurt/Mühlhausen Math.-Natur. Reihe.* **23** (1987), 103–111.

[44] K. Yano and S. Ishihara. *Tangent and cotangent bundles: differential geometry.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, No. 16.